ଜ୍ୟାମିତିକ

ଅନୁଶୀଳନୀ ସମର୍ଥନ ।

ପ୍ରଥମଖଣ୍ଡ ।

ଶ୍ରୀ ଚନ୍ଦ୍ରାମଣି ଦାସ ଓ ଶ୍ରୀ ଗଣେଶ୍ୱର ମିଶ୍ରଙ୍କଦ୍ୱାରା

ପ୍ରଣୀତ ।

ପ୍ରଥମ ସଂସ୍କରଣ ।

ସନ ୧୮୮୯ ମସିହା ।

ଢେଙ୍କାନାଳ ।

CUTTACK.

Printed at the Victoria Press.
Orissa Printing Corporation.

1889.

ଭୂମିକା ।

ମାଇନର , ଭର୍ଣ୍ଣାକ୍ୟୁଲର ଓ ଅପର ପ୍ରାଇମେରୀ ଛାତ୍ରମାନଙ୍କ ପଠନର ଅସୁବିଧା ମୋଚନାର୍ଥ କୌଣସି ଅନୁଶୀଲନୀସମର୍ଥନ ପୁସ୍ତକ ଉତ୍କଳଭାଷାରେ ନ ଥିବାରୁ ଆମ୍ଭେମାନେ ଅନୁଶୀଲନୀସମର୍ଥନ ନାମକ ଏହି ପୁସ୍ତକ ଖଣ୍ଡିକ ପ୍ରକାଶ କଲୁଁ । ଏଥିରେ ବ୍ରଜମୋହନ ବାବୁ ଓ ରାଧାନାଥ ବାବୁଙ୍କ ଅନୁବାଦିତ ଜ୍ୟାମିତିର ପ୍ରଥମ ଅଧ୍ୟାୟର ପ୍ରତ୍ୟେକ ପ୍ରତିଜ୍ଞାର ସମସ୍ତ ଅନୁଶୀଲନୀଗୁଡ଼ିକ ମୂଳପ୍ରତିଜ୍ଞାନୁସାରେ ସଜ୍ଜିତ ହୋଇ ସୂତ୍ରରୂପେ ସମର୍ଥନ କରା ଯାଇଅଛି ।

ଏହା ଯେ ସମ୍ପୂର୍ଣ୍ଣରୂପେ ଦୋଷବହୀନ ହୋଇଥିବ ତାହା କହି ନ ପାରୁଁ ଯଦ୍ୟପି ଏହାଦ୍ୱାରା ସାଧାରଣର କୌଣସି ଉପକାର ଦର୍ଶି ପାରେ ତେବେ ଆମ୍ଭମାନଙ୍କ ପରିଶ୍ରମକୁ ସଫଳ ଜ୍ଞାନ କରିବୁଁ । ଇତି ।

୧୦ । ୮ । ୮୮

ଢେଙ୍କାନାଳ

ଶ୍ରୀ ଚନ୍ଦ୍ରମଣି ଦାସ
ଶ୍ରୀ ଗଣେଶ୍ୱର ମିଶ୍ର

ପୃଷ୍ଠା	ପଂକ୍ତି	ଅଶୁଦ୍ଧ	ଶୁଦ୍ଧ
୬	୧.୭	ଖଗକୁ ବିଭକ୍ତକର	ଖଗକ ବିଭକ୍ତକର
୧୬	୧	ଚ୍କ ବିଭକ୍ତକର	ବିଭକ୍ତକର୍
,,	୧୭	ପ୍ରମାଣ କର	ପ୍ରମାଣ କର୍
୨୦	୮	ଘଃଗ ଠାରୁ ବୃହତ୍ତର	ଘଙଗ କୋଣଠାରୁ ବୃହ-ତ୍ତର ।
୨୧	୧	କଖ ର ଦ୍ୱିଗୁଣଠାରୁ	କଗର ଦ୍ୱିଗୁଣଠାରୁ
୨୩	୨୨	ଖ ଭୂମି ସଲଗ୍ନ କୋଣ	ଗ ଭୂମି ସଲଗ୍ନ କୋଣ
୨୭	୧୨	ଖଗ ଭୂମି	ଖଘ ଭୂମି
୩୦	,,	୪୭ ଉପପାଦ୍ୟର ଚିତ୍ରରେ ୯ ସ୍ଥାନରେ	"ଚ" ହେବ
୩୧	୭	ଶାର୍ଶ୍ୱରେ	ପାର୍ଶ୍ୱରେ
୩୬	,,	୫୧ ସମ୍ପାଦ୍ୟ ଚିତ୍ରରେ "ଛ" ସ୍ଥାନରେ "ଚ" ଓ ଚ ସ୍ଥାନରେ ଛ ହେବ । ଅଉ ଖଗ ରେଖାକୁ ଯେଉଁ-ଠାରେ ବର୍ଦ୍ଧିତ ଚଘ ରେଖା ଛେଦ କରୁଅଛି ସେ ଠାରେ ଝ ବନ୍ଦୁ ସ୍ଥାପିତ ହେବ ।	
୩୩	୨୩	∠ ଖଘଚ	∠ ଖଘଛ
୩୮	,,	୫୭ ଉପପାଦ୍ୟ ଚିତ୍ରରେ କଗ କର୍ଣ୍ଣ ନ ଟାଣି ଖଘ କର୍ଣ୍ଣ ଟାଣିବାକୁ ହେବ ।	
୩୮	୨୯	∠ ଝଚଘ = ∠ ଝଗଘ	∠ ଝକଘ = ∠ ଝଗଖ
୩୯	୨	କଘ = ଖଘ	କଘ = ଖଗ
୪୯	,,	୭୫ ସମ୍ପାଦ୍ୟ ଚିତ୍ରରେ କଗ ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ସରଳ ରେଖା ହୋଇ କଖ ହେବ ।	
୫୪	୧୩	ସୂସ୍ମ କୋଣର	ସୂକ୍ଷ୍ମ କୋଣର ।

———o———

ପାରିଭାଷିକ ସଙ୍କେତ ଓ ତାହାର ବ୍ୟାଖ୍ୟା ,

ଜ୍ୟାମିତିକ ଅନୁଶୀଳନୀ ବ୍ୟାଖ୍ୟାର ସଂକ୍ଷେପ ନିମିତ୍ତ କେତେଗୁଡ଼ିଏ ଶବ୍ଦର ପରିବର୍ତ୍ତରେ କେତେକ ସାଙ୍କେତିକ ଚିହ୍ନ ବ୍ୟବହୃତ ହୋଇ-ଅଛି । ଯଥା ;—

ଯେଉଁ ଶବ୍ଦର ପରିବର୍ତ୍ତରେ ଯେ ସାଙ୍କେତିକ ଚିହ୍ନ ବ୍ୟବହୃତ ହୋଇଅଛି ତାହାର ବ୍ୟାଖ୍ୟା ।

କୋଣ	∠	∠ କଖଗ ଅର୍ଥାତ୍ କଖଗ କୋଣ ।
ତ୍ରିଭୁଜ	△	△ କଖଗ ,, କଖଗ ତ୍ରିଭୁଜ ।
ସମାନ୍ତରାଳ	∥	କଖ ∥ ଗଘ ,, କଖ ରେଖା ଗଘର ସମାନ୍ତରାଳ ।
ଚତୁର୍ଭୁଜ	□	□ କଖଗଘ ,, କଖଗଘ ଚତୁର୍ଭୁଜ କ୍ଷେତ୍ର
ସମାନ	=	କଖ = ଗଘ ,, କଖ ରେଖା ଗଘର ସହିତ ସମାନ ।
ଏକତ୍ରଯୋଗେ	+	କଖ + ଗଘ ,, କଖ ଓ ଗଘ ରେଖା ଏକତ୍ରେ ।
ଅନ୍ତର	−	କଖ − ଗଘ ,, କଖ ରେଖାରୁ ଗଘ ରେଖା ଅନ୍ତର କଲେ ।
ବୃହତ୍ତର	7	କଖ 7 ଗଘ ,, କଖ ରେଖା ଗଘ ରେଖା ଠାରୁ ବୃହତ୍ତର ।
ଯେହେତୁ ବା କାରଣ	∵	
ଅତଏବ	∴	

(୧୦ ମ ପ୍ରଃ) ଅର୍ଥାତ୍ କ୍ଷେତ୍ରତତ୍ତ୍ୱର ୧ ମ ଅଧ୍ୟାୟ ଦଶମ
ଅନୁସାରେ ।

(୭ ଉପଃ) ଅର୍ଥାତ୍ ଏହି ଅନୁଶୀଳନୀ ବ୍ୟାଖ୍ୟା ପୁସ୍ତକର ଷଷ୍ଠସଂ-
ଖ୍ୟକ ଉପପାଦ୍ୟ ଅନୁସାରେ ।

(୭୨ ସମ୍ପାଦ୍ୟ ; " ଏହି ଅନୁଶୀଳନୀ ବ୍ୟାଖ୍ୟା ପୁସ୍ତକର ବାସ୍ତରସଂ-
ଖ୍ୟକ ସମ୍ପାଦ୍ୟ ଅନୁସାରେ ।

(୩୨ଶ ପ୍ରଃ ୨ୟ ଅନୁଃ)" କ୍ଷେତ୍ରତତ୍ତ୍ୱ ପ୍ରଥମ ଅଧ୍ୟାୟର ୩୨ ପ୍ରତି-
ଜ୍ଞାର ଦ୍ୱିତୀୟ ଅନୁମାନ ଅନୁସାରେ ।

(୩୦ ସଂ) " କ୍ଷେତ୍ରତତ୍ତ୍ୱ ୯ ମ ଅଧ୍ୟାୟର ୩୦ ସଂଖ୍ୟା
ଅନୁସାରେ ।

(୯ ମ ସ୍ୱତଃ) ଏ ଏ ୧୦ ସ୍ୱତଃସିଦ୍ଧ ଅନୁସାରେ ।

,

କଖ କଖ ରେଖାର ଉପର ଅଙ୍କିତ
ସମଚତୁର୍ଭୁଜ ।

ଜ୍ୟାମିତିକ

ଅନୁଶୀଳନୀ ସମର୍ଥନ ।

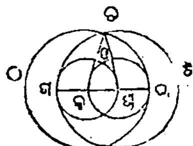
ପ୍ରଥମ ଅଧ୍ୟାୟ ।

୧ ମ ପ୍ରତିଜ୍ଞାର ଅନୁଶୀଳନୀ ।

୧ ମ ସମ୍ପାଦ୍ୟ ।

ପ୍ରତ୍ୟେକ ବାହୁ ଭୂମିର ଦ୍ୱିଗୁଣ ଏପରି ଗୋଟିଏ ସମଦ୍ୱିବାହୁ ତ୍ରିଭୁଜ କୌଣସି ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟସୀମାବିଶିଷ୍ଟ ସରଳରେଖା ଉପରେ ଅଙ୍କନ କରିବାକୁ ହେବ ।

କଖ ଏକ ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ଭୂମି ଉପରେ ପ୍ରତ୍ୟେକ ବାହୁ ଭୂମିର ଦ୍ୱିଗୁଣ ଏପରି ଗୋଟିଏ ସମଦ୍ୱିବାହୁ ତ୍ରିଭୁଜ ଅଙ୍କିତ କରିବାକୁ ହେବ ।



କକୁ କେନ୍ଦ୍ର କରି କଖକୁ ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ ନେଇ ଏକବୃତ୍ତ, ଏବଂ ଖକୁ କେନ୍ଦ୍ର କରି ଖକକୁ ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ ନେଇ ଆଉ ଏକ ବୃତ୍ତ ଅଙ୍କିତ କର; କଖ ଭୂମିକୁ ଉଭୟ ଦିଗରେ ଗ ଓ ଘ ପର୍ଯ୍ୟନ୍ତ ବୃଦ୍ଧି କର (୨ ୟ · ସ୍ୱୀ ·); ପରେ ଖକୁ କେନ୍ଦ୍ର କରି ଖଗ ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ ନେଇ ଏକ ବୃତ୍ତ ଏବଂ କକୁ କେନ୍ଦ୍ର କରି କଘକୁ ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ ନେଇ ଆଉ ଏକ ବୃତ୍ତ ଅଙ୍କିତ କର (୧୫ ସ); ଆଉ ଉଭୟ ବୃତ୍ତ ସମ୍ପାତବିନ୍ଦୁ ଚ ସ୍ଥାନରୁ ଚକ ଓ ଚଖକୁ ସରଳରେଖାଦ୍ୱାରା ଯୋଗ କର (୧ ମ · ସ୍ୱୀ ·); ତାହାହେଲେ କଖଚ ଯେଉଁ ହେବ ତାହା ସମ୍ପାଦ୍ୟ ସମଦ୍ୱିବାହୁ ।

ଖଙଗ ବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ର କ; ∴କଖ=କଗ (୧୫ ସଂ:); କଙଘ ବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ର ଖ; ∴ଖ କ=ଖ ଘ (୧୫ ସ); ∴କ ଘ ଓ ଖ ଗ ପ୍ରତ୍ୟେକ କ ଖ ଭୂମିର ଦ୍ୱିଗୁଣ । ଗଚଛ ବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ର ଖ ∴ଖଚ =ଖ ଗ ସେହିପରି ଘ ଚ ଠ ବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ର କ । ∴କ ଚ=କ ଘ ପୂର୍ବେ କୁହା ଯାଇଅଛି ଯେ କ ଘ ଓ ଖ ଗ ପ୍ରତ୍ୟେକ କ ଖର ଦୁଇଗୁଣ । ବର୍ତ୍ତମାନ କୁହାଗଲା ଯେ କ ଘ=କ ଚ ଓ ଖ ଗ=ଖ ଚ, ∴କ ଚ ଓ ଖ ଚ ମଧ୍ୟ ପ୍ରତ୍ୟେକ କଖର ଦୁଇଗୁଣ । ∴କ ଖ ଭୂମି ଉପରେ ତାହାର ଦୁଇଗୁଣ ଏପରି ଏକ ସମଦ୍ୱିବାହୁ ତ୍ରିଭୁଜ କ ଖ ଚ ଅଙ୍କିତ ହେଲା ।

୨ ଯ୍ଯ ପ୍ରତିଜ୍ଞାର ଅନୁଶୀଳନୀ ।

୨ ଯ୍ଯ ସମ୍ପାଦ୍ୟ ।

ଯଦି ବିନ୍ଦୁଟି ରେଖାର ଏକପ୍ରାନ୍ତରେ ଥାଏ, ତେବେ ପ୍ରତିଜ୍ଞା କପର ପ୍ରମାଣ କରିବାକୁ ହେବ ।

କଖ ଏକ ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ସରଳରେଖା ଏହାର ପ୍ରାନ୍ତ ଖ ବିନ୍ଦୁଠାରୁ କଖର ସମାନ ଏକ ସରଳରେଖା ଟାଣିବାକୁ ହେବ ।

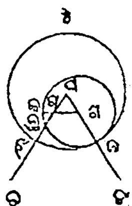
ଖକୁ କେନ୍ଦ୍ର କରି ଖକକୁ ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ ନେଇ ଏକ ବୃତ୍ତ ଅଙ୍କିତ କର, କଖକୁ ଗ ପର୍ଯ୍ୟନ୍ତ ବୃଦ୍ଧି କର, ତାହାହେଲେ ଖ ଗ ସରଳରେଖା କଖର ସହିତ ସମାନ ହେବ; କାରଣ କ ଖ=ଖ ଗ (୧୫ ସ) ।

କ ଖ ଗ

୩ ଯ୍ଯ ସମ୍ପାଦ୍ୟ ।

ଯଦି ବିନ୍ଦୁଟି ମଧ୍ୟରେ ଥାଏ ତେବେ ପ୍ରତିଜ୍ଞା କପର ପ୍ରମାଣ ହେବ ।

ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ସରଳରେଖା; ଏହାର ମଧ୍ୟସ୍ଥ ଗ ବିନ୍ଦୁଠାରୁ ତାହାର ସରଳରେଖା ଟାଣିବାକୁ ହେବ ।

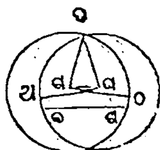


ଖ ଗ ସରଳରେଖା ଉପରେ ଖ ଗ ଘ ଏକ ସମବାହୁତ୍ରିଭୁଜ ଅଙ୍କିତ କର (୧ ମ · ପ୍ର ·); ଘ ଖ ଓ ଘ ଗକୁ ଙ ଓ ଚ ପର୍ଯ୍ୟନ୍ତ ବୃଦ୍ଧି କର । ପରେ ଖକୁ କେନ୍ଦ୍ର କରି ଖକକୁ ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ ନେଇ କ ଛ ଜ ଏକ ବୃତ୍ତ; ଆଉ ଘକୁ କେନ୍ଦ୍ର ଓ ଘଜକୁ ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ ନେଇ ଜ ଝ ଟ ଆଉ ଏକ ବୃତ୍ତ ଅଙ୍କିତ କର; ତାହାହେଲେ ଗ ଝ ସରଳରେଖା କ ଖର ସମାନ ହେବ ।

କାରଣ; ଖକ=ଖଜ (୧୫ ସଂ); ଘଜ=ଘଝ (୧୫ ସଂ), ଘଗ=ଘଖ (ସମବାହୁ ତ୍ରିଭୁଜର ବାହୁ); ∴ ଗଝ=ଖଜ (୩ ସ୍ୱ ସ୍ୱଃ); କିନ୍ତୁ ଖକ=ଖଜ; ∴ ଗଝ=କଖ (୧ ମ ସ୍ୱଃ); ∴ ଗଝ ସରଳରେଖା ଗ ଏହି ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁଠାରୁ କ ଖର ସମାନ ହୋଇ ଅଙ୍କିତ ହେଲା ।

୪ ର୍ଥ ସାଧ୍ୟ ।

ଦୁଇ ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ଅସମାନ ସରଳରେଖା ମଧ୍ୟରେ କ୍ଷୁଦ୍ରତର ଉପରେ ଏପରି ଏକ ସମଦ୍ୱିବାହୁ ତ୍ରିଭୁଜ ଅଙ୍କିତ କରିବାକୁ ହେବ ଯାହାର ସମାନ ଦୁଇ ବାହୁ ପ୍ରତ୍ୟେକ ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ବୃହତ୍ତର ସରଳରେଖାର ସମାନ ।



କ ଖ ଓ ଗ ଘ ଦୁଇଟି ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ଅସମାନ ସରଳରେଖା ମଧ୍ୟରୁ କ୍ଷୁଦ୍ରତର ଗ ଘ ରେଖା ଉପରେ ପ୍ରତ୍ୟେକ ବାହୁ ବୃହତ୍ତର କ ଖର ସମାନ ଏପରି ଏକ ସମଦ୍ୱିବାହୁ ତ୍ରିଭୁଜ ଅଙ୍କିତ କରିବାକୁ ହେବ ।

ଗ ଓ ଘ ବିନ୍ଦୁଠାରୁ କଖର ସମାନ କରି ଗ ଠ ଓ ଘ ଥ ରେଖା ଟାଣ (୨ ସ୍ୱ · ପ୍ର ·); ଯଥାକ୍ରମେ ଗ ଓ ଘକୁ କେ

ଗ ଠ ଓ ଘ ଥକୁ ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ ନେଇ ଦୁଇଟି ବୃତ୍ତ ଅଙ୍କିତ କର । ଉଭୟ ବୃତ୍ତର ସମ୍ପାତବିନ୍ଦୁ ଦ ଠାରୁ ଗ ଓ ଘ ପର୍ଯ୍ୟନ୍ତ ସରଳରେଖା ଟାଣ; ତାହାହେଲେ ଦ ଗ ଘ ତ୍ରିଭୁଜ ଉଦ୍ଦେଶ୍ୟ ସମ୍ପାଦକ ହେବ ।

କାରଣ; ଗଠ=କଖ=ଗଦ (୧୫ ସ); ଏବଂ ଘଥ=କଗ =ଘଦ (୧୫ ସ); ଅତଏବ ଦୁଇ ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ଅସମାନ ସରଳରେଖା ଇତ୍ୟାଦି ।

୩ ୟ ପ୍ରପାଠକର ଅନୁଶୀଳନୀ ।

୫ ମ ସମ୍ପାଦ୍ୟ ।

ଦୁଇ ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ସରଳରେଖା ମଧ୍ୟରେ କ୍ଷୁଦ୍ରତରକୁ ବୃହତ୍ତରର ସମାନ ବୃଦ୍ଧି କରିବାକୁ ହେବ । କଖ ଏକ କ୍ଷୁଦ୍ରତର ସରଳରେଖାକୁ ଗ ଏହି ବୃହତ୍ତର ସରଳରେଖାର ସମାନ ବୃଦ୍ଧି କରିବାକୁ ହେବ ।

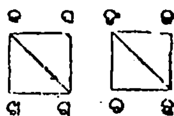
କ ବିନ୍ଦୁଠାରୁ ଗ ର ସମାନ କଘ ଏକ ସରଳରେଖା ଟାଣ (୨ୟ ପ୍ର ୨); କ କୁ କେନ୍ଦ୍ର କରି କଘ କୁ ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ ନେଇ ଘ ଙ ଚ ବୃତ୍ତ ଅଙ୍କିତ କର ଏବଂ କ ଖ କୁ ଙ ପର୍ଯ୍ୟନ୍ତ ବୃଦ୍ଧି କର । କ ଘ=କ ଙ=ଗ ; ∴ କଖ ରେଖା ଗ ର ସମାନ ହୋଇ ଙ ପର୍ଯ୍ୟନ୍ତ ବର୍ଦ୍ଧିତ ହେଲା ।

୪ ର୍ଥ ପ୍ରପାଠକର ଅନୁଶୀଳନୀ ।

୬ ଷ୍ଠ ଉପପାଦ୍ୟ ।

ଦୁଇ ସମଚତୁର୍ଭୁଜ ମଧ୍ୟରେ ଯେବେ ଗୋଟିକର ଏକ ବାହୁ ଅନ୍ୟର ଏକ ବାହୁ ସହିତ ସମାନ ହୁଏ; ତେବେ ସମଚତୁର୍ଭୁଜ ଦୁଇଟି ସର୍ବତୋଭାବେ ସମାନ ହେବ ।

କଖଗଘ ଓ ଙଚଛଜ ଦୁଇ ସମଚତୁର୍ଭୁଜ ମଧ୍ୟରେ ଗୋଟିକର କଖ ବାହୁ ଅନ୍ୟର ବାହୁ ସହିତ ସମାନ ଥିବ; ଦୁଇଟି ସମ ପରସ୍ପର ସମାନ ହେବ ।



କ ଗ ଓ ଚଛ ସରଳରେଖାଦ୍ୱ ସଂଯୁକ୍ତ କର ।

କଖ=ଖଗ ଏବଂ ଙଚ=ଚଛ (୩୦ ସ୍ୱ); କିନ୍ତୁ କଖ=ଙଚ (କଳ୍ପନା); ତାହା ହେଲେ ଖଗ=ଚଛ (୧ ମ ସ୍ୱଃ); ∠କଖଗ=∠ଙଚଛ (୧୧ ସ୍ୱଃ); ତେବେ△କଖଗ=△ଙଚଛ (୪ର୍ଥ ପ୍ର) ସେହିପରି△କଘଗ=△ଙଜଛ । ∴△କଖଗ+△କଘଗ=△ଙଚଛ+△ଙଜଛ (୨ୟ ସ୍ୱଃ) ∴ଦୁଇ ସମଚତୁର୍ଭୁଜ ମଧ୍ୟରେ ଇତ୍ୟାଦି ।

୫ ମ ପ୍ରତିଜ୍ଞାର ଅନୁଶୀଳନୀ ।

୭ ମ ଉପପାଦ୍ୟ ।

ସମଦ୍ୱିବାହୁ ତ୍ରିଭୁଜର ବାହୁଦ୍ୱୟ ବର୍ଦ୍ଧିତ ନ କରି ଭୂମି ସଲଗ୍ନ କୋଣଦ୍ୱୟ ପରସ୍ପର ସମାନ ପ୍ରମାଣ କରିବାକୁ ହେବ ।

କ ଖ ଗ ଏକ ସମଦ୍ୱିବାହୁ ତ୍ରିଭୁଜ ଏହାର କଖ ଓ କଗ ବାହୁଦ୍ୱୟକୁ ବର୍ଦ୍ଧିତ ନ କରି କ ଖ ଗ କୋଣ, କଗଖ କୋଣର ସହିତ ସମାନ ପ୍ରମାଣ କରିବାକୁ ହେବ । କ ଖ ରେଖା ମଧ୍ୟରେ ଘ ନାମକ ଏକ ବିନ୍ଦୁ ନିଅ ଏବଂ କଗ ମଧ୍ୟରୁ କ ଘର ସମାନ କ ଙ ଅଂଶ ଚ୍ଛେଦନ କର (୩ୟ ପ୍ରଃ); ଘଙ, ଘଗ, ଙଖ ସଂଯୁକ୍ତ କର । କଙଖ ଆଉ କଘଗ ଦୁଇ ତ୍ରିଭୁଜ ମଧ୍ୟରେ କଘ=କଙ ଏବଂ କଖ=କଗ, ∠ଘକଗ=∠ଙକଖ; ତାହା ହେଲେ ଘଗ=ଙଖ ଓ ∠କଖଙ=∠କଗଘ (୪ର୍ଥ ପ୍ରଃ); ଘଖଙ ଆଉ ଘଙଗ ଦୁଇ ତ୍ରିଭୁଜ ମଧ୍ୟରେ ଘଖ=ଙଗ; ଘଗ=ଙଖ ଓ ∠ଘଖଙ=∠ଙଗଘ ତାହାହେଲେ∠ଘଙଖ=∠ଙଘଗ ଏବଂ∠ଖଘଙ=∠ଗଙଘ (୪ର୍ଥ ପ୍ରଃ); ∠ଖଘଙ−∠ଗଘଙ=∠ଘଙଗ ∠ଘଙଖ । ଘଗଖ ଓ ଙଖଗ ଦୁଇ ତ୍ରିଭୁଜ ମଧ୍ୟରେ ଘଖ=ଘଗ=ଙଖ ଏବଂ∠ଖଘଗ=∠ଖଙଗ ଥିବାରୁ ଅବଶିଷ୍ଟ



=∠ଘଖଗ (୪ର୍ଥ ପ୍ରଃ) । ଅତଏବ ଏହ ସମଦ୍ୱିବାହୁ ତ୍ରିଭୁଜ ଉପପାଦ୍ୟ ।

୮ମ ଉପପାଦ୍ୟ ।

ପ୍ରଥମ ପ୍ରତିଜ୍ଞାର ଚିତ୍ରରେ କଖ ରେଖାର ଦୁଇପାର୍ଶ୍ୱ ଘ ଓ ଙ ପର୍ଯ୍ୟନ୍ତ ବର୍ଦ୍ଧିତ କର ଏବଂ ଗଘ ଓ ଗଙ ସଂଯୁକ୍ତ କର ପ୍ରମାଣ କର ଯେ ଘଗଙ ତ୍ରିଭୁଜ ସମଦ୍ୱିବାହୁ ।

ଘକ=କଖ=ଖଙ (୧ମ ସ); ତେବେ ଘଖ=କଙ (୨ୟ ସ୍ୱଃ) । ଘଖଗ ଓ କଙଗ ଦୁଇ ତ୍ରିଭୁଜ ମଧ୍ୟରେ ଘଖ=କଙ ଏବଂ କଗ=ଖଗ; ∠ଗକଙ=∠ଗଖଘ ଯେହେତୁ ସମବାହୁ ତ୍ରିଭୁଜର ବାହୁ ଓ କୋଣ; ତେବେ ଅବଶିଷ୍ଟ ଗଘ=ଗଙ; ∠ଗଘଖ=∠ଗଙକ (୪ର୍ଥ ପ୍ରଃ) ∴ ପ୍ରଥମ ପ୍ରତିଜ୍ଞାର ଚିତ୍ରରେ ଉପପାଦ୍ୟ ।

୬ଷ୍ଠ ପ୍ରତିଜ୍ଞାର ଅନୁଶୀଳନୀ ।

୯ମ ଉପପାଦ୍ୟ ।

ପଞ୍ଚମ ପ୍ରତିଜ୍ଞାର ଚିତ୍ରରେ ଯେବେ ଖଞ ରେଖା ଗଠ ରେଖାକୁ ଜ ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରେ ଓ କଜ ସଂଯୁକ୍ତ କରାଯାଏ; ତେବେ କଜ ରେଖା କ କୋଣକୁ ଦୁଇ ସମାନ ଅଂଶରେ ବିଭକ୍ତ କରିବ ।

∠ଝଗଠ=∠ଗଖଞ ଏବଂ ∠କଖଞ=∠କଗଠ (୫ମ ପ୍ରତିଜ୍ଞାରେ) ପ୍ରମାଣ କରାଯାଇଅଛି । ଏହେତୁ ଗଖଜ ତ୍ରିଭୁଜର ଖଜ=ଗଜ (୬ଷ୍ଠ ପ୍ରଃ); କଖଜ ଓ କଗଜ ଦୁଇ ତ୍ରିଭୁଜ ମଧ୍ୟରେ କଖ=କଗ ଓ ଖଜ=ଗଜ; ∠କଖଜ=∠କଗଜ ହେବାରୁ ∠ଖକଜ=∠ଗକଜ (୪ର୍ଥ ପ୍ରଃ); ପ୍ରତିଜ୍ଞାର ଚିତ୍ରରେ ଉପପାଦ୍ୟ ।

୭ ମ ପ୍ରତିଜ୍ଞାର ଅନୁଶୀଳନୀ ।

୧୦ ମ ଉପପାଦ୍ୟ ।

ଏକ ଭୂମି ଉପରେ ଭିନ୍ନ ଦିଗରେ ଯେବେ ଦୁଇ ତ୍ରିଭୁଜ ଏପରି ଅବସ୍ଥିତ ହୁଏ ଯେ ଭୂମିର ଏକପ୍ରାନ୍ତ ସଂଲଗ୍ନ ଏକ ଏକ ବାହୁ ପରସ୍ପର ସମାନ ଏବଂ ଅପର ପ୍ରାନ୍ତ ସଂଲଗ୍ନ ଏକ ଏକ ବାହୁ ମଧ୍ୟ ପରସ୍ପର ସମାନ ହୁଏ, ତେବେ ଏକ ତ୍ରିଭୁଜର ବାହୁଦ୍ୱୟର ଅନ୍ତର୍ଗତ କୋଣ ମଧ୍ୟ ଅନ୍ୟ ତ୍ରିଭୁଜର ବାହୁଦ୍ୱୟର ଅନ୍ତର୍ଗତ କୋଣ ସଙ୍ଗେ ସମାନ ହେବ ।



କଖଗ ଓ କଖଘ ଦୁଇଟି ତ୍ରିଭୁଜ କଖ ଭୂମିର ଭିନ୍ନ ଦିଗରେ ଅବସ୍ଥିତ ଅଛି; କ ବିନ୍ଦୁ ସଂଲଗ୍ନ କଗ = କଘ ଓ ଖ ବିନ୍ଦୁ ସଂଲଗ୍ନ ଖଗ = ଖଘ, ତେବେ ∠କଗଖ = ∠କଘଖ ହେବ ।

ଗଘ ସଂଯୁକ୍ତ କର ତାହା ହେଲେ କଗଘ ତ୍ରିଭୁଜର କଗ = କଘ, ∴ ∠କଗଘ = ∠କଘଗ (୫ ମ ପ୍ରଃ); ସେହିପରି ଖଗଘ ତ୍ରିଭୁଜର ∠ଖଗଘ = ∠ଖଘଗ (୫ ମ ପ୍ରଃ); ତେବେ ∠କଗଘ + ∠ଖଗଘ = ∠କଘଗ + ∠ଖଘଗ (୨ୟ ସ୍ୱଃ) । ∴ ଏକଭୂମି ଇତ୍ୟାଦି ।

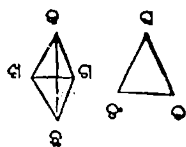
୮ ମ ପ୍ରତିଜ୍ଞାର ଅନୁଶୀଳନୀ ।

୧୧ ଶ ଉପପାଦ୍ୟ ।

ସପ୍ତମ ପ୍ରତିଜ୍ଞାର ସାହାଯ୍ୟ ବ୍ୟତୀତ ଅଷ୍ଟମ ପ୍ରତିଜ୍ଞା ପ୍ରମାଣ କର ।

କଖଗ ଓ ଘଙଚ ତ୍ରିଭୁଜର କଖ ଓ କଗ ବାହୁ କ୍ରମଶଃ ଘଙ ଓ ଘଚ ବାହୁଦ୍ୱୟଙ୍କ ସମାନ ଏବଂ ଖଗ ଭୂମି ଙଚ ଭୂମି ସଙ୍ଗେ ସମାନ ତେବେ ଖକଗ କୋଣ ଙଘଚ କୋଣର ସମାନ ହେବ ।

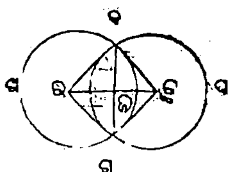
ଘଙଚ ତ୍ରିଭୁଜକୁ କଖଗ ତ୍ରିଭୁଜର ସହିତ ଏରୂପ କର ଯେପରି ଙଚ ଭୂମି ଖଗ ଭୂମିର ସହିତ ମିଳିଯାଏ ଆଉ ସ ବାହୁ ପରସ୍ପର ସଂଲଗ୍ନ ହୁଏ, ଏବଂ ତ୍ରିଭୁଜଦ୍ୱୟର ଶୃଙ୍ଗ ବିପରୀ



ଭୂମିର ଉଭୟ ପାର୍ଶ୍ୱରେ ପଡେ । ଘଙଚ ତ୍ରିଭୁଜ ଯେପରି ଛ ଖ ଗ ତ୍ରିଭୁଜରୂପରେ ଅବସ୍ଥିତ ହେଲା ଅର୍ଥାତ୍ ଙ, ଚ ଓ ଘ ବିନ୍ଦୁ କ୍ରମଶଃ ଖ, ଗ ଓ ଛ ସ୍ଥାନୀୟ ହେଲା । ତାହା ହେଲେ କଛ ସଂଯୁକ୍ତ କର; ଖକ = ଖଛ (କଳ୍ପନା) ଅତ ∠ ଖକଛ = ∠ ଖଛକ (୫ମ ପ୍ର:), ଏହିପରି ∠ ଗକଛ = ∠ ଗଛକ ∴ ସମସ୍ତ ∠ ଖକଗ = ∠ ଖଛଗ = ∠ ଙଘଚ । ଅତଏବ ସପ୍ତମ ପ୍ରତିଜ୍ଞାର ଇତ୍ୟାଦି ।

୧୬ ଶ ଉପପାଦ୍ୟ ।

ଦୁଇ ବୃତ୍ତ ପରସ୍ପରକୁ ଛେଦ କଲେ, କେନ୍ଦ୍ରଦ୍ୱୟର ସଂଯୋଜକ ରେଖା ଛେଦବିନ୍ଦୁଦ୍ୱୟର ସଂଯୋଜକ ରେଖାର ସହିତ ସମକୋଣ କରିବ ଓ ତାହାକୁ ଦୁଇ ସମାନ ଅଂଶରେ ବିଭକ୍ତ କରିବ ।



କଖଗ ଓ କଗଘ ଦୁଇବୃତ୍ତ କ ଓ ଗ ବିନ୍ଦୁରେ ପରସ୍ପର ଛେଦ ହୋଇ-ଅଛି ମଧ୍ୟ ଉଭୟ ବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ର ଚ ଓ ଛ ଏବଂ ଛେଦବିନ୍ଦୁ କ ଓ ଗ ସଂଯୁକ୍ତ ହୋଇଅଛି; ତାହାହେଲେ ∠ ଚଜକ, ∠ ଛଜକ, ∠ ଛଜଗ ଓ ∠ ଚଜଗ ପ୍ରତ୍ୟେକେ ସମକୋଣ ହେବେ ଏବଂ କଗ ରେଖା ଜ ବିନ୍ଦୁରେ ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡିତ ହେବ । କଛଚ ଓ ଗଛଚ ଦୁଇ ତ୍ରିଭୁଜର ଛକ = ଛଗ (୧୫ ସଂ), ଛଚ ସାଧାରଣ ଏବଂ ଚକ ଭୂମି = ଚଗ ଭୂମି ୧୫ ସଂ) ∴ ∠ କଛଚ = ∠ ଗଛଚ (୮ମ ପ୍ର:) । ପୁନଃ ଜ ଓ ଗଛଜ ଦୁଇତ୍ରିଭୁଜର ଛକ = ଛଗ, ଛଜ ସାଧାରଣ ଏବଂ ଛକ = ∠ ଗଛଜ, ∴ ∠ ଛଜକ = ∠ ଛଜଗ ଓ କଜ (୪ର୍ଥ ପ୍ର) ∴ ∠ ଛଜକ ଓ ∠ ଛଜଗ ପ୍ରତ୍ୟେକେ ସମ-

କୋଣ (୧୦ମ ସ) .˙. ଚଙ୍କ ରେଖା କଗ ରେଖାର ସହିତ ସମକୋଣ କରି ତାହାକୁ ଦୁଇ ସମାନ ଅଂଶରେ ବିଭକ୍ତ କରିଅଛି ।

୯ ମ ପ୍ରତିଜ୍ଞାର ଅନୁଶୀଳନୀ ।

୧୩ଶ ସମ୍ପାଦ୍ୟ ।

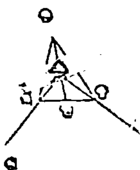
ଏକ ସମଦ୍ୱିବାହୁ ତ୍ରିଭୁଜକୁ ଦୁଇ ସମାନ ସମକୋଣୀତ୍ରିଭୁଜରେ ବିଭକ୍ତ କର । କଖଗ ଗୋଟିଏ ସମଦ୍ୱିବାହୁ ତ୍ରିଭୁଜ, ଏହାକୁ ଦୁଇଟି ସମାନ ସମକୋଣୀତ୍ରିଭୁଜରେ ବିଭକ୍ତ କରିବାକୁ ହେବ ।



କଗଖ ଶୀର୍ଷକୋଣକୁ ଗଘ ରେଖା ଦ୍ୱାରା ଦ୍ୱିଖଣ୍ଡ କର (୯ମ ପ୍ର:), ଗଘ ରେଖା କଖ ଭୂମିକୁ ଘ ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରୁ ତେବେ ସେହି ଛେଦକ ରେଖାଦ୍ୱାରା ତ୍ରିଭୁଜଟି ଦୁଇ ସମାନ ସମକୋଣୀତ୍ରିଭୁଜରେ ବିଭକ୍ତ ହେବ । .˙. କଘଗ ଆଉ ଖଘଗ ଦୁଇତ୍ରିଭୁଜର କଗ = ଖଗ, ଗଘ ସାଧାରଣ, ଏବ ∠କଗଘ = ∠ଖଗଘ .˙. ∠ଗଘକ = ∠ଗଘଖ ଏବ △କଗଘ = △ଖଗଘ (୪ର୍ଥ ପ୍ର:) .˙. କଘଗ ଓ ଖଘଗ କୋଣ ପ୍ରତ୍ୟେକେ ସମକୋଣ (୧୦ମ ସ) ଅତଏବ ଏକ ସମଦ୍ୱିବାହୁ ତ୍ରିଭୁଜକୁ ଇତ୍ୟାଦି ।

୧୪ଶ ଉପପାଦ୍ୟ ।

ଯଦି ନବମ ପ୍ରତିଜ୍ଞାର ଚଣ କିତ ସମବାହୁତ୍ରିଭୁଜର ଶୃଙ୍ଗ, କ ଶୃଙ୍ଗର ଉପରେ ପଡେ ତେବେ ପ୍ରତିଜ୍ଞା କିପରି ପ୍ରମାଣ କରିବାକୁ ହେବ ।

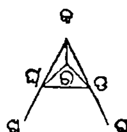


ଚକ କୁ ଯୋଗ କରି ଜ ପର୍ଯ୍ୟନ୍ତ ବୃଦ୍ଧି କର △ଚଘକ ଓ △ଚଙକ ମଧ୍ୟରେ ଚଘ = ଚଙ ଚକ ସାଧାରଣ, କଘ ଭୂମି = କଙ ଭୂମି, .˙. ∠ଘଚକ = ∠ଙଚକ (୮ମ ପ୍ର:); ପୁନଶ୍ଚ △ଘଚଜ ଓ △ଙଚଜ ମଧ୍ୟରେ ଘଚ = ଙଚ, ଚଜ ସାଧାରଣ = ∠ଙଚଜ .˙. ଘଜ ଭୂମି = ଙଜ ଭୂମି (୪ର୍ଥ ପ୍ର) ।

ଓ △ଙକଜ ମଧ୍ୟରେ ଘକ=ଙକ, କଜ ସାଧାରଣ, ଘଜ ଭୂମି=ଙଜ ଭୂମି ∴ ∠ଘକଜ=∠ଙକଜ (୮ମ ପ୍ର.) ଅତଏବ ଯଦ୍ଧ ୯ମ ପ୍ରତିଜ୍ଞା ଇତ୍ୟାଦ ।

୧୫ଶ ଉପପାଦ୍ୟ ।

ଯଦ୍ଧ ନବମ ପ୍ରତିଜ୍ଞାର ଚିହ୍ନାଙ୍କିତ ସମବାହୁଦ୍ୱିଭୁଜଟି କ ଶୃଙ୍ଗର ଭିତରେ ପଡ଼େ ତେବେ ପ୍ରତିଜ୍ଞା କପର ପ୍ରମାଣ କରିବାକୁ ହେବ ।



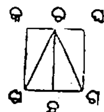
କଚ ସଂଯୁକ୍ତ କର △ଜଚଘ ଓ △ଜଚଙ ମଧ୍ୟରେ କଘ=କଙ, କଚ ସାଧାରଣ, ଏବଂ ଘଚ ଭୂମି=ଙଚ ଭୂମି ∴ ∠ଘକଚ=∠ଙକଚ (୮ମ ପ୍ର.) ଅତଏବ ଯଦ୍ଧ ନବମ ପ୍ରତିଜ୍ଞା ଇତ୍ୟାଦ ।

୧୦ମ ପ୍ରତିଜ୍ଞାର ଅନୁଶୀଳନୀ ।

୧୬ଶ ସମ୍ପାଦ୍ୟ ।

ଗୋଟିଏ ସମତ୍ରିଭୁଜକ୍ଷେତ୍ରକୁ ସମାନ ଦୁଇ ଆୟତକ୍ଷେତ୍ରରେ ବିଭକ୍ତ କରିବାକୁ ହେବ ।

କଖଗଘ ଗୋଟିଏ ସମଚତୁର୍ଭୁଜ, ଏହାକୁ ଦୁଇଟି ସମାନ ଆୟତକ୍ଷେତ୍ରରେ ବିଭକ୍ତ କରିବାକୁ ହେବ । କଘ ବାହୁକୁ ଚ ବିନ୍ଦୁରେ ଓ ଖଗ ବାହୁକୁ ଛ ବିନ୍ଦୁରେ ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡ କର (୧୦ମ ପ୍ରଃ) ଏବଂ ଚଛ ସଂଯୁକ୍ତ କର, ତାହା



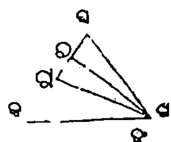
ହେଲେ ସମଚତୁର୍ଭୁଜ କ୍ଷେତ୍ରଟି ଚଛଦ୍ୱାରା ଦୁଇ ସମାନ ଆୟତକ୍ଷେତ୍ରରେ ବିଭକ୍ତ ହେବ । ଚଖ ଓ ଚଗ ସଂଯୁକ୍ତ କର । △କଖଚ ଓ ଘଗଚ ତ୍ରିଭୁଜର କଖ=ଗଘ (୩୦ ସ)ର କଚ=ଘଚ ଓ ∠ଚକଖ=∠ଚଘଗ (୩୦ ସଂ, ୧୧ ସ୍ୱ) ∴ ଚଖ=ଚଗ ଓ △କଖଚ=△ଘଗଚ (୪ର୍ଥ ପ୍ର.) । ପୁନରପି ଚଛଖ ଓ ଚଛଗ ଦୁଇତ୍ରିଭୁଜର ଚଛ ସାଧାରଣ ଛଖ=ଛଗ, ଚଖ=ଚଗ ∴ ∠ଚଛଖ

=∠ ଚଛଗ (୮ମ ପ୍ର·) ∴ ∠ ଚଛଖ ଓ ∠ ଚଛଗ ପ୍ରତ୍ୟେକେ ସମକୋଣ (୧୦ମ ସଂ) ସୁତରାଂ △ଚଛଖ=△ଚଛଗ (୪ର୍ଥ ପ୍ର·) ଏହିପରି ପ୍ରମାଣ କରା ଯିବ ଯେ ∠ କଚଛ ଓ ∠ ଘଚଛ ପ୍ରତ୍ୟେକେ ସମକୋଣ । ସୁତରାଂ କଖଛଚ ଓ ଘଗଛଚ ଦୁଇଟି ଚତୁର୍ଭୁଜର କୋଣଗୁଡ଼ିକ ସମକୋଣ ଅତଏବ ଏମାନେ ଆୟତକ୍ଷେତ୍ର (୩୧ ସଂ) ଆଉ △କଖଚ=△ଘଗଚ ଓ △ଚଛଖ= △ଚଛଗ ∴ ସମସ୍ତ କଖଚଛ ଆୟୃତ=ସମସ୍ତ ଘଗଛଚ ଆୟୃତ (୨ୟ ସ୍ୱ·) ଅତଏବ ଗୋଟିଏ ସମଚତୁର୍ଭୁଜ ଇତ୍ୟାଦି ।

୧୧ଶ ପ୍ରତିଜ୍ଞାର ଅନୁଶୀଳନୀ ।

୧୭ଶ ସମସ୍ୟା ।

ଏକନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ଅସୀମ ସରଳରେଖାରେ ଏପରି ଏକ ବିନ୍ଦୁ ସ୍ଥିର କରି ଯେ ତାହା ବହିସ୍ଥ ଦୁଇଟି ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ବିନ୍ଦୁର ସମଦୂରବର୍ତ୍ତୀ ହେବ ।



କଖ ଏକ ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ଅସୀମ ସରଳରେଖା, ଏବଂ ଗ ଓ ଘ ଦୁଇଟି ବହିସ୍ଥ ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ବିନ୍ଦୁ, କଖ ରେଖାରେ ଏପରି ଏକବିନ୍ଦୁ ସ୍ଥିର କରି-ବାକୁ ହେବ ଯେ ତାହା ଗ ଓ ଘ ଦୁଇଟି ବିନ୍ଦୁଠାରୁ ସମଦୂରବର୍ତ୍ତୀ । ଗ ଓ ଘ ସଂଯୁକ୍ତ କରି ତାହାକୁ ଚ ବିନ୍ଦୁରେ ଦ୍ୱିଖଣ୍ଡ କର (୧୦ମ ପ୍ର·) ଏବଂ ଗଘର ସହିତ ସମକୋଣ କରି ଚ ବିନ୍ଦୁରୁ ଚଙ ଲମ୍ବ ଟାଣ (୧୧ଶ ପ୍ର·), ଚଙ; ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ କଖ ରେଖାକୁ ଙ ବିନ୍ଦୁରେ ସ୍ପର୍ଶ କରୁ; ଙ ବିନ୍ଦୁଟି ନିର୍ଣ୍ଣେୟ ବିନ୍ଦୁ ହେବ । *

---

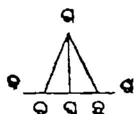
* ଯଦି ଗ ଓ ଘ ବିନ୍ଦୁଦ୍ୱୟର ସଂଯୋଗ ରେଖାକୁ ବୃଦ୍ଧି କଲେ ତାହା କ ଖ ରେଖାର ସହିତ ସମକୋଣ କରେ ତେବେ ଚ ଙ ରେଖା ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ କ ଖ ରେଖାକୁ କୌଣସି ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରିବ ନାହିଁ ଅର୍ଥାତ୍ ତାହାର ସମାନ୍ତର ହେବ ; ସୁତରାଂ ତାହା ହେଲେ ପ୍ରତିଜ୍ଞା ଅସାଧ୍ୟ ହେବ ।

ଡଗ ଓ ଡଘ ସଂଯୁକ୍ତ କର । ଡଗ = ଡଘ (୪ର୍ଥ ପ୍ର) ∴ ଏକ ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ଅସୀମ ସରଳରେଖା ଇତ୍ୟାଦି ।

୧୨ଶ ପ୍ରତିଜ୍ଞାର ଅନୁଶୀଳନୀ ।

୧୮ଶ ସମ୍ପାଦ୍ୟ ।

ଏକ ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ଅସୀମ ସରଳରେଖାରେ ଏପରି ଦୁଇବିନ୍ଦୁ ସ୍ଥିର କର, ଯେପରି ସେମାନେ ବହିସ୍ଥ କୌଣସି ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ବିନ୍ଦୁଠାରୁ ସମଦୂରବର୍ତ୍ତୀ ହେବେ ।



କଖ ଏକ ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ଅସୀମ ସରଳରେଖାରେ ଏପରି ଦୁଇଟି ବିନ୍ଦୁ ସ୍ଥିର କର ଯେପରି ସେମାନେ ଗ ଏହି ବହିସ୍ଥ ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟବିନ୍ଦୁଠାରୁ ସମଦୂରବର୍ତ୍ତୀ ହେବେ । ଗ ବିନ୍ଦୁଠାରୁ କଖ ଉପରେ ଗଘ ଲମ୍ବ ଟାଣ (୧୨ଶ ପ୍ର.) ଏବଂ ଘକ ରେଖା ମଧ୍ୟରେ ଚ ନାମକ କୌଣସି ଏକ ବିନ୍ଦୁ ନେଇ ଘଖ ବା ବର୍ଦ୍ଧିତ ଘଖ ରେଖାଠାରୁ ଘଚର ସମାନ ଘଛ ଅଂଶ ଛେଦ କର (୩ୟ ପ୍ର.) ତେବେ ଚ ଓ ଛ ବିନ୍ଦୁ, ଦୁଇଟି ନିରୂପିତ ବିନ୍ଦୁ ହେବ । କାରଣ ଗଚ ଓ ଗଛ ସଂଯୁକ୍ତ କଲେ ପ୍ରମାଣ ହେବ ଯେ ଗଚ = ଗଛ (୪ର୍ଥ ପ୍ର.); ∴ ଏକ ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ଅସୀମ ସରଳରେଖାରେ ଇତ୍ୟାଦି ।

୧୩ଶ ପ୍ରତିଜ୍ଞାର ଅନୁଶୀଳନୀ ।

୧୯ଶ ଉପପାଦ୍ୟ ।

ଏକ ସରଳରେଖା ଅନ୍ୟ ସରଳରେଖା ଉପରେ ଦଣ୍ଡାୟମାନ ହେଲେ ଯେବେ ସନ୍ନିହିତ କୋଣଦ୍ୱୟକୁ ଦ୍ୱିଖଣ୍ଡ କରାଯାଏ ତେବେ ଦୁଇ ଦ୍ୱିଖଣ୍ଡକାରକ ରେଖା ପରସ୍ପର ପରସ୍ପରର ଲମ୍ବ ହେବ ।

କଖ ସରଳରେଖା ଗଘ ସରଳରେଖାର ସହିତ ଖ ବିନ୍ଦୁରେ ସଂଲଗ୍ନ ହୋଇ ଉତ୍ପନ୍ନ କରଥିବା କଖଗ ଓ କଖଘ ଏ ଦୁଇ କୋଣକୁ

ଯଥାକ୍ରମେ ଖଚ ଓ ଖଛ ରେଖା ରେଖାଦ୍ୱୟ ଦ୍ୱିଖଣ୍ଡ କରେ, ଯାହା ଅଛି ପ୍ରମାଣ କରିବାକୁ ହେବ ଚ ଖ ଛ କୋଣଟି ସମକୋଣ ।

∴ କ ଖ ଚ କୋଣଟି କ ଖ ଗ କୋଣର ଓ କଖଛ କୋଣଟି କଖଘ କୋଣର ଅର୍ଦ୍ଧ । କିନ୍ତୁ ∠କ ଖ ଗ + ∠କ ଖ ଘ = ୨ ସମକୋଣ (୧୩ଶ ପ୍ରଃ); ସୁତରାଂ ∠କଖଚ + ∠କଖଛ = ୨ ସମକୋଣର ଅର୍ଦ୍ଧ ଅର୍ଥାତ୍ ୧ ସମକୋଣ; ତେବେ ଚଖଛ କୋଣଟି ସମକୋଣ । ∴ ଚଖ ଓ ଖଛ ରେଖା ପରସ୍ପର ପରସ୍ପରର ଲମ୍ବ (୧୦ମ ସଃ) ।

୧୪ ଶ ପ୍ରତିଜ୍ଞାର ଅନୁଶୀଳନୀ ।

୨୦ ଶ ଉପପାଦ୍ୟ ।

କଖଗ ଓ କଘଙ ଏ ଦୁଇ ତ୍ରିଭୁଜ ଏରୂପେ ଅବସ୍ଥିତ ଅଛି ଯେ ଖଖ ଓ କଘ ଏକରେଖା ହୋଇଅଛି; ଯେବେ ଖକଗ ଓ ଘକଙ କୋଣ ସମାନ ଏବଂ ଘକଙ ରେଖାର ଭିନ୍ନ ଦିଗରେ ଅବସ୍ଥିତ ହୁଏ ତେବେ କଗ ଓ କଙ ଏକରେଖା ହେବ ।

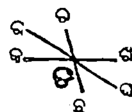
∠ଖକଗ = ∠ଘକଙ; ଉଭୟରେ ଗକଘ କୋଣ ଯୋଗ କଲେ ∠ଖକଗ + ∠ଗକଘ = ∠ଘକଙ + ∠ଗକଘ (୨ ସ୍ୱ ସ୍ୱଃ); କିନ୍ତୁ ∠ଖକଗ + ∠ଗକଘ = ୨∠ସମ (୧୩ଶ ପ୍ରଃ); ∴ ଘକ ରେଖାର କ ବିନ୍ଦୁରେ ଙକ ଓ ଗକ ରେଖା ଭିନ୍ନ ଦିଗରୁ ଆସି ମିଳିତ ହୋଇ ଘକ ରେଖାର ଦୁଇ-ପାର୍ଶ୍ୱସ୍ଥ କୋଣକୁ ଦୁଇ ସମକୋଣ ସଙ୍ଗେ ସମାନ କରିବାରୁ ଗକ ଓ କଙ ରେଖା ଏକରେଖା (୧୪ଶ ପ୍ରଃ) ।

୧୫ ଶ ପ୍ରତିଜ୍ଞାର ଅନୁଶୀଳନୀ ।

୨୧ ଶ ଉପପାଦ୍ୟ ।

ଦୁଇ ସରଳରେଖା ପରସ୍ପରକୁ ଛେଦ କଲେ ସମ୍ମୁଖସ୍ଥ କୋଣ-ଦ୍ୱୟର ଦ୍ୱିଖଣ୍ଡକାରକ ରେଖାଦ୍ୱୟ ଏକରେଖା ହେବ ।

ପରସ୍ପର ଛେଦକ କଖ ଓ ଗଘ ରେଖାଦ୍ୱୟର ସମ୍ମୁଖସ୍ଥ ଗଙଖ ଓ କଙଘ କୋଣଦ୍ୱୟ ଙଚ ଓ ଙଛ ରେଖାଦ୍ୱାରା ଦୁଇସମାନ ଅଂଶରେ ବିଭକ୍ତ ହୋଇଅଛି; ତେବେ ଙଚ ଙଛ ରେଖା ଏକରେଖା ହେବ ।

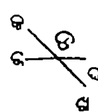


∠ଗଙଖ=∠କଙଘ (୧୫ ଶ ପ୍ରଃ); ତେବେ ଗଙଖ କୋଣର ଅର୍ଦ୍ଧ ଚଙଖ କୋଣ=କଙଛ କୋଣ; ଉଭୟରେ କଙଚ କୋଣ ଯୋଗ କଲେ ∠ଚଙଖ+∠ଚଙକ=∠କଙଛ+∠କଙଚ (୨ ସ୍ୱ ସ୍ୱଃ); କିନ୍ତୁ ∠ଖଙଚ+∠ଚଙକ=୨∠ସମ (୧୩ ଶ ପ୍ରଃ); ସୁତରାଂ ∠ଛଙକ+∠କଙଚ=୨∠ସମ । ଅତଏବ ଛଙ ଓ ଙଚ ଏକ ସରଳରେଖା (୧୪ ଶ ପ୍ରଃ); ଅତଏବ ଦୁଇ ସରଳରେଖା ଇତ୍ୟାଦି ।

୨୨ ଶ ଉପପାଦ୍ୟ ।

ଚାରି ସରଳରେଖା ଏକ ବିନ୍ଦୁରେ ସଂଲଗ୍ନ ହୋଇ ଯଦି ପ୍ରତୀପ କୋଣଗୁଡ଼ିକ ସମାନ ହୁଏ ତେବେ ଚାରୋଟି ମଧ୍ୟରୁ ଦୁଇ ଦୁଇଟି ରେଖା ଏକରେଖା ହେବ ।

କଙ, ଗଙ, ଖଙ ଓ ଘଙ ଏ ଚାରୋଟି ରେଖା ଙ ବିନ୍ଦୁରେ ସଂଯୁକ୍ତ ହୋଇ କଙଘ ଓ ଘଙଖ କୋଣଦ୍ୱୟକୁ ଯଥାକ୍ରମେ ଗଙଖ ଓ ଗଙକ କୋଣ ସହିତ ସମାନ କରିଅଛି; ତେବେ କଙ ଓ ଙଖ ଆଉ ଗଙ ଓ ଙଘ ଏକ ରେଖା ହେବ ।



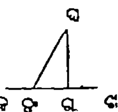
∠କଙଘ+∠ଘଙଖ+∠ଖଙଗ+∠ଗଙକ=୪∠ସମ (୧୫ ଶ ପ୍ରଃ ୨ୟ ଅନୁମାନ); ∠କଙଘ+∠ଘଙଖ=∠ଖଙଗ+∠ଗଙକ=୨∠ସମ; ∴ କଙ ଓ ଙଖ ଏକରେଖା (୧୪ ଶ ପ୍ରଃ); ସେହିପରି ପ୍ରମାଣ ହେବ ଗଙ ଓ ଙଘ ଏକରେଖା । ∴ ଚାରି ସରଳରେଖା ଇତ୍ୟାଦି ।

୧୭ ଶ ପ୍ରତିଜ୍ଞାର ଅନୁଶୀଲନୀ ।

୨୩ ଶ ସମ୍ପାଦ୍ୟ ।

ଏକ ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ବିନ୍ଦୁରୁ କୌଣସି ସରଳରେଖା ଉପରେ ଏକାଧିକ ଲମ୍ବ ଟଣା ଯାଇ ନ ପାରେ ।

କଖ ଏକ ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ସରଳରେଖା, ଘ ଏକ ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ବିନ୍ଦୁ, ଘ ବିନ୍ଦୁଠାରୁ କଖ ସରଳରେଖା ଉପରେ ଏକାଧିକ ଲମ୍ବ ଟଣା ଯାଇ ନ ପାରେ । ଘ ବିନ୍ଦୁଠାରୁ କଖ ସରଳରେଖା ଉପରେ ଘଗ ଲମ୍ବ ଟାଣ (୧୨ ଶ ପ୍ରଃ); ତେବେ କଗଘ କୋଣ ସମକୋଣ; ଯେବେ ବୋଲ ଘ ବିନ୍ଦୁରୁ ଏକାଧିକ ଲମ୍ବ ଟଣା ଯାଇ ପାରେ ତେବେ ଘଙ ଲମ୍ବ ଟାଣ; ∠ଘଙକ =∠ସମ, (୧୦ ମ ସଃ); ସୁତରାଂ ∠ଘଙକ=∠ଘଗଙ (୧୧ ସ୍ୱଃ) କିନ୍ତୁ ∠ଘଙକ 7∠ଘଗଙ (୧୬ଶ ପ୍ରଃ); ସୁତରାଂ ଅସାଧ୍ୟ; ଅତଏବ ଏକ ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ବିନ୍ଦୁରୁ ଇତ୍ୟାଦି ।

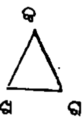


୧୭ ଶ ପ୍ରତିଜ୍ଞାର ଅନୁଶୀଲନୀ ।

୨୪ ଶ ଉପପାଦ୍ୟ ।

କୌଣସି ତ୍ରିଭୁଜର ତିନି କୋଣର ସମଷ୍ଟି ତିନି ସମକୋଣଠାରୁ ନ୍ୟୂନ ।

କଖଗ ଏକ ତ୍ରିଭୁଜ ଏହାର କ, ଖ, ଓ ଗ କୋଣର ସମଷ୍ଟି ତିନି ସମକୋଣଠାରୁ ନ୍ୟୂନ ।



∠ଖ+∠ଗ, ଦୁଇ ସମକୋଣଠାରୁ ନ୍ୟୂନ; ∠ଗ+∠କ, ଦୁଇ ସମକୋଣରୁ ନ୍ୟୂନ; ଏବଂ ∠କ+∠ଖ, ଦୁଇ ସମକୋଣରୁ ନ୍ୟୂନ (୧୭ଶ ପ୍ରଃ); ∴ ୨∠ଖ+୨∠ଗ+ ୨∠କ, ୬ ସମକୋଣରୁ ନ୍ୟୂନ (୪ ର୍ଥ ସ୍ୱଃ); ∴ ∠କ+∠ଖ +∠ଗ, ୩ ସମକୋଣ ଅପେକ୍ଷା ନ୍ୟୂନ ।

୨୫ ଶ ଉପପାଦ୍ୟ ।

ତ୍ରିଭୁଜର ଦୁଇଟି ବହିସ୍ଥ କୋଣ ଦୁଇ ସମକୋଣଠାରୁ ବୃହତ୍ତର ଏବଂ ତିନି ବହିସ୍ଥ କୋଣ ଏକତ୍ରେ ତିନିସମକୋଣଠାରୁ ବୃହତ୍ତର ।

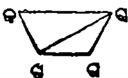
କଖଗ କୌଣସି ତ୍ରିଭୁଜର ଦୁଇଟି ବହିସ୍ଥ କୋଣ ଦୁଇ ସମକୋଣଠାରୁ ବଡ଼; କଖ ଓ ଖଗ ବାହୁକୁ ଯଥାକ୍ରମେ ଘ ଓ ଙ ପର୍ଯ୍ୟନ୍ତ ବୃଦ୍ଧି କର । ∠କଖଗ+∠ଗଖଘ=୨∠ସମ (୧୩ ଶ ପ୍ରଃ); ଓ ∠କଗଖ+∠କଗଙ=୨∠ସମ (୧୩ ଶ ପ୍ର); କିନ୍ତୁ ∠କଖଗ+∠କଗଖ; ଦୁଇ ସମକୋଣଠାରୁ ନ୍ୟୁନ (୧୭ଶ ପ୍ରଃ); ତାହା ହେଲେ ∠ଗଖଘ+∠କଗଙ, ଦୁଇ ସମକୋଣଠାରୁ ଅବଶ୍ୟ ବୃହତ୍ତର । ପୁନଶ୍ଚ ତିନିବହିସ୍ଥ କୋଣ ତିନିସମକୋଣଠାରୁ ବୃହତ୍ତର । କାରଣ କଖଗ ତ୍ରିଭୁଜର ଅନ୍ତର ଓ ବହିସ୍ଥ କୋଣ ଏକତ୍ରେ ଛ ସମକୋଣ ସଙ୍ଗେ ସମାନ (୧୩ଶ ପ୍ରଃ); ତନ୍ମଧ୍ୟରୁ ଅନ୍ତରସ୍ଥ ତିନି କୋଣ ଏକତ୍ରେ ତିନିସମକୋଣଠାରୁ ନ୍ୟୁନ (୨୪ ଉପ); ∴ ବହିସ୍ଥ ତିନିକୋଣ ଅବଶ୍ୟ ତିନିସମକୋଣଠାରୁ ବୃହତ୍ତର । ଅତଏବ ତ୍ରିଭୁଜର ଦୁଇଟି ବହିସ୍ଥ କୋଣ ଇତ୍ୟାଦି ।

୧୮ ଶ ପ୍ରତିଜ୍ଞାର ଅନୁଶୀଳନୀ ।

୨୬ଶ ଉପପାଦ୍ୟ ।

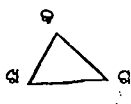
କଖଗଘ ଚତୁର୍ଭୁଜର କଘ ବୃହତ୍ତମ ଓ ଖଗ କ୍ଷୁଦ୍ରତମ ବାହୁ, ପ୍ରମାଣ କର କଖଗ କୋଣ କଘଗ କୋଣଠାରୁ ବୃହତ୍ତର ଏବଂ ଖଗଘ କୋଣ ଖକଘ କୋଣଠାରୁ ବୃହତ୍ତର ।

ଖଘ ସଂଯୁକ୍ତ କର । ତାହା ହେଲେ କଖଘ ତ୍ରିଭୁଜର କଘ ବାହୁ, କଖ ବାହୁଠାରୁ ବୃହତ୍ତର ଥିବାରୁ ତାହାର ସମ୍ମୁଖସ୍ଥ କଖଘ କୋଣ, କଘଖ କୋଣଠାରୁ ବୃହତ୍ତର (୧୮ଶ ପ୍ରଃ);



ଆଉ ଖଗଘ ତ୍ରିଭୁଜର ଗଘ ବାହୁ, ଖଗ ଅପେକ୍ଷା ବଡ ଥିବାରୁ ତାହାର ସମ୍ମୁଖସ୍ଥ ଘଖଗ କୋଣ, ଖଘଗ କୋଣଠାରୁ ବୃହତ୍ତର (୧୮ ଶ ପ୍ରଃ); ∴ ∠ କଖଘ + ∠ ଘଖଗ 7 ∠ କଘଖ + ∠ ଖଘଗ (୪ର୍ଥ ସ୍ୱଃ); ଏହାପର କଗ ସଂଯୁକ୍ତ କଲେ ପ୍ରମାଣ ହେବ ଯେ ∠ ଖଗଘ 7 ∠ ଖକଘ; ∴ କଖଗଘ ଚତୁର୍ଭୁଜର ଇତ୍ୟାଦ ।

୨୭ ଶ ଉପପାଦ୍ୟ ।



ବିଷମବାହୁ ତ୍ରିଭୁଜର ସମସ୍ତ କୋଣ ଅସମାନ । କଖଗ ଏକ ବିଷମବାହୁ ତ୍ରିଭୁଜ ଅର୍ଥାତ୍ ଏହାର କଗ, ଖଗ ବାହୁଠାରୁ ଏବଂ ଖଗ, କଖ ବାହୁଠାରୁ ବଡ ତାହା ହେଲେ ପ୍ରମାଣ କରିବାକୁ ହେବ ଯେ ଏହାର କ, ଖ ଓ ଗ କୋଣ ପ୍ରତ୍ୟେକେ ଅସମାନ ।

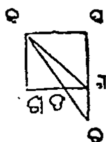
କଗ ବୃହତ୍ତର ବାହୁର ସମ୍ମୁଖସ୍ଥ ∠ ଖ 7 ∠ କ (୧୮ ଶ ପ୍ରଃ); ଏବଂ କଖ ଅପେକ୍ଷା ବୃହତ୍ତର ଖଗ ବାହୁର ସମ୍ମୁଖସ୍ଥ ∠ କ 7 ∠ ଗ (୧୮ ଶ ପ୍ରଃ); ∴ କ, ଖ ଓ ଗ କୋଣ ପ୍ରତ୍ୟେକେ ଅସମାନ ଅର୍ଥାତ୍ କେହି କାହାର ସହିତ ସମାନ ନୁହନ୍ତି । ଅତଏବ ବିଷମବାହୁ ତ୍ରିଭୁଜର ଇତ୍ୟାଦ ।

୧୯ ଶ ପ୍ରତିଜ୍ଞାର ଅନୁଶୀଳନୀ ।

୨୮ ଶ ଉପପାଦ୍ୟ ।

କଖଗଘ ସମଚତୁର୍ଭୁଜର କ ବିନ୍ଦୁଠାରୁ କଚ ସରଳରେଖା ଏପରି ଭାବରେ ଟାଣ ଯେପରି କ ତାହା ଖଗ ରେଖାକୁ ଙ ବିନ୍ଦୁରେ ଓ ବର୍ଦ୍ଧିତ ଘଗ ରେଖାକୁ ଚ ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରେ ତାହା ହେଲେ କଚ ରେଖା କଖଗଘ ସମଚତୁର୍ଭୁଜର କଗ କର୍ଣ୍ଣ ଅପେକ୍ଷା ବୃହତ୍ତର ହେବ ।

∠ ଖଗଚ + ∠ ଖଗଘ = ୨ ∠ ସମ (୧୩ ଶ ପ୍ରଃ); କିନ୍ତୁ ∠ ଖଗଘ = ୧ ∠ ସମ (୩୦ ସ); ∴ ∠ ଖଗଚ = ∠ ସମ ; ତେବେ ∠



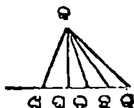
ଖଗଚ = ∠ ଖଗଘ; ∠ କଗଘ 7 ∠ କଚଗ (୧୬ ଶ ପ୍ରଃ); କିନ୍ତୁ ∠ ଖଗଘ 7 ∠ କଚଘ (୯ମ ସ୍ୱଃ); ତେବେ ଖଗଚ କୋଣ ମଧ୍ୟ କଗଘ କୋଣଠାରୁ ବଡ଼; ଆଉ ∠ ଖଗଚ + ∠ ଖଗକ, କଚଘ କୋଣଠାରୁ ଅଧିକର ବଡ଼। ତେବେ କଗଚ କୋଣ କଚଗ କୋଣ ଠାରୁ ଅଧିକର ଅଧିକ ବୃହତ୍ତର। ତାହା ହେଲେ କଚ ବାହୁ କଗ ବାହୁଠାରୁ ବୃହତ୍ତର (୧୯ଶ ପ୍ରଃ)। ଅତଏବ କଖଗଘ ସମଚତୁର୍ଭୁଜକ୍ଷେ ଇତ୍ୟାଦ।

୬୯ ଶ ଉପପାଦ୍ୟ ।

କୌଣସି ଏକ ସରଳରେଖାର ବହିସ୍ଥ ଏକ ବିନ୍ଦୁଠାରୁ ସେହି ସରଳରେଖା ପର୍ଯ୍ୟନ୍ତ ଯେତେ ସରଳରେଖା ଟଣାଯାଏ, ତନ୍ମଧ୍ୟରୁ ଯେଉଁ ରେଖା ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ସରଳ ରେଖାର ଲମ୍ବ ହେବ ତାହା ସର୍ବାପେକ୍ଷା କ୍ଷୁଦ୍ରତମ; ଆଉ ଅନ୍ୟ ରେଖା ମଧ୍ୟରେ ଯେଉଁ ରେଖା ଲମ୍ବଠାରୁ ଯେତେ ଅନ୍ତର ସେ ନିକଟବର୍ତ୍ତୀ ରେଖାଠାରୁ ତେତେ ବଡ଼, ଏବଂ ଲମ୍ବର ଦୁଇ ପାର୍ଶ୍ୱରେ କେବଳ ଗୋଟିଏ୨ ସମାନ ରେଖା ଟଣା ଯାଇ ପାରେ।

ଖଗ ସରଳରେଖା ଉପରେ ତଦ୍ବହିସ୍ଥ କ ବିନ୍ଦୁଠାରୁ କଙ, କଘ, କଚ, କଛ, କଗ ପ୍ରଭୃତି ଯେତେଗୁଡ଼ିଏ ରେଖା ଟଣାଯାଇ ପାରେ ତନ୍ମଧ୍ୟରେ ଲମ୍ବ ରେଖା କଘ କ୍ଷୁଦ୍ରତମ; ଏବଂ ଅନ୍ୟଗୁଡ଼ିକ ମଧ୍ୟରେ କଛ, କଚଠାରୁ ଓ କଗ, କଛଠାରୁ ବୃହତ୍ତର ହେବ। ଏବଂ କଘ ର ପ୍ରତିପାର୍ଶ୍ୱରେ କେବଳ ଗୋଟିଏ ଗୋଟିଏ କର ସମାନ ରେଖା ଟଣା ଯାଇ ପାରେ।

∠କଘଞ > ∠କଚଘ (୧୬ଶ ପ୍ରଃ); କିନ୍ତୁ ∠କଘଞ = ∠କଘଚ (୧୧ଶ ସ୍ୱଃ) ତେବେ ∠କଘଚ > ∠କଚଘ; ∴ ବୃହତ୍ତର ∠କଘଚ ର ସମ୍ମୁଖସ୍ଥ କଚ, କଘଠାରୁ ବୃହତ୍ତର (୧୯ଶ ପ୍ରଃ); ଆଉ ∠କଚଘ > ∠କଛଚ (୧୬ଶ ପ୍ରଃ); ∠କଘଚ > ∠କଚଛ; ତେବେ ∠କଘଚ > ∠କଛଚ; କିନ୍ତୁ ∠କଚଛ > ∠କଘଚ (୧୬ଶ ପ୍ରଃ); ତେବେ ∠କଚଛ > ∠କଛଚ; ∴ବୃହତ୍ତର ∠କଚଛର ସମ୍ମୁଖସ୍ଥ କଛ, କଚଠାରୁ ବଡ଼ (୧୯ଶ ପ୍ରଃ) ଏହିପରି ପ୍ରମାଣ ହେବ ଯେ କଟ, କଛଠାରୁ ବୃହତ୍ତର ଇତ୍ୟାଦି ।

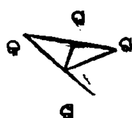


ପୁନରପି ଘଗ ରେଖାରୁ ଘଚକୁ ଖଘର ସମାନ କରି ଛେଦ କର ଓ କଚ ଟାଣ । ଖଘ = ଘଚ (ଅଙ୍କନ) କଘ ରେଖାଟି କଖଘ ଓ କଘଚ ତ୍ରିଭୁଜ ଦ୍ୱୟର ସାଧାରଣ ବାହୁ, ଏବଂ ∠କଘଖ = କଘଚ (୧୧ ସ୍ୱଃ) ∴କଖ ଭୂମି = କଚ ଭୂମି (୪ର୍ଥ ପ୍ରଃ) । କଚ ରେଖାଟି କଘ ରେଖାର ଯେ ପାର୍ଶ୍ୱରେ ଅଛି ସେ ପାର୍ଶ୍ୱରେ ଅନ୍ୟ ରେଖା କଖର ସମାନ ହୋଇ ନ ପାରେ । ଯେବେ ହୋଇପାରେ ତେବେ ମନେକର କଛ = କଖ, କିନ୍ତୁ କଚ = କଖ ∴କଚ = କଛ, କିନ୍ତୁ ପୂର୍ବେ କୁହା ଯାଇଅଛି ଯେ କଛ, କଚଠାରୁ ବୃହତ୍ତର, ସୁତରାଂ ଏରୂପ ହେବା ଅସମ୍ଭବ । ଅତଏବ କଚର ଭିନ୍ନ ଅନ୍ୟ ରେଖା କଖର ସମାନ ହୋଇ ନ ପାରେ । ଅତଏବ କୌଣସି ଏକ ସରଳରେଖାର ଇତ୍ୟାଦି ।

୨୦ ଶ ପ୍ରତିଜ୍ଞାର ଅନୁଶୀଳନୀ ।

୩୦ଶ ଉପପାଦ୍ୟ ।

ତ୍ରିଭୁଜର ଯେ ବାହୁ ନଅ ତାହା ଅନ୍ୟ ଦୁଇବାହୁ ଅନ୍ତର ଅପେକ୍ଷା ବଡ଼ ହେବ ।



କଖଗ ଏକ ତ୍ରିଭୁଜ ଏହାର ଯେ ବାହୁ ନିଅ ତାହା ଅପର ଦୁଇ ବାହୁର ଅନ୍ତରଠାରୁ ବଡ ହେବ ଅର୍ଥାତ୍ କଗ-କଖ, ଖଗଠାରୁ, କଗ-ଖଗ, କଖଠାରୁ ଓ ଖଗ-କଖ, କଗଠାରୁ ଶ୍ରେଷ୍ଠ ହେବ। କଖ ଓ କଗ ଏ ଦୁଇ ବାହୁ ମଧ୍ୟରେ କଖର ସମାନ କଗରୁ ଏକ ଅଂଶ ଛେଦ କର (୩ୟ ପ୍ରଃ) ଯଥା; କଘ, ଖଘ ଯୋଗ କର ଓ କଖକୁ ଚ ପର୍ଯ୍ୟନ୍ତ ବୃଦ୍ଧି କର। କଖ =କଘ.∴ ∠କଖଘ=∠କଘଖ (୫ମ ପ୍ରଃ) ଏବଂ ∠ଘଖଚ= ଖଘଗ (୫ମ ପ୍ରଃ) ଘଖଚ କୋଣ ଘଖଗଠାରୁ ବୃହତ୍ତର (୯ମ ସ୍ୱଃ) ତାହା ହେଲେ ଖଘଗ କୋଣ ମଧ୍ୟ ଘଖଗ କୋଣଠାରୁ ବୃହତ୍ତର। ତେବେ ବୃହତ୍ତର କୋଣର ସମ୍ମୁଖସ୍ଥ ଖଗ ବାହୁ, ଶ୍ରେଷ୍ଠ କୋଣର ସମ୍ମୁଖସ୍ଥ ଘଗଠାରୁ ବଡ (୧୯ ପ୍ରଃ) ତାହା ହେଲେ କଗ-କଘ ବା କଖ =ଘଗ.∴ଖଗ ବାହୁ ଅନ୍ୟ ଦୁଇ ବାହୁର ଅନ୍ତରଠାରୁ ବୃହତ୍ତର ହେଲା। ଏପରି ଅନ୍ୟାନ୍ୟ ବାହୁର ପ୍ରମାଣ ହେବ।

୫୧ଶ ଉପପାଦ୍ୟ।

ତ୍ରିଭୁଜର ତିନିବାହୁ ସମଷ୍ଟି, ପ୍ରତ୍ୟେକ ବାହୁର ଦୁଇଗୁଣଠାରୁ ବୃହତ୍ତର, କିନ୍ତୁ କୌଣସି ଦୁଇବାହୁର ସମଷ୍ଟିର ଦୁଇଗୁଣଠାରୁ କ୍ଷୁଦ୍ରତର ହେବ।

କଖଗ ଏକ ତ୍ରିଭୁଜ ଏହାର ତିନିବାହୁ ଏକତ୍ରେ ପ୍ରତ୍ୟେକ ବାହୁର ଦ୍ୱିଗୁଣଠାରୁ ବୃହତ୍ତର ହେବ।



∵ କଖ + କଗ, ଖଗଠାରୁ ବଡ଼ (୨୦ ପ୍ରଃ), ଏହି ଦୁଇ ବସ୍ତୁରେ ଖଗ ଯୋଗ କଲେ କଖ + କଗ + ଖଗ, ଖଗ + ଖଗ କିମ୍ବା ଖଗର ଦ୍ୱିଗୁଣଠାରୁ ବଡ଼ (୪ର୍ଥ ସ୍ୱଃ)। କଖ + ଖଗ, କଗଠାରୁ ବଡ଼ (୨୦ ପ୍ରଃ) ଏହି ଦୁଇ-ସ୍ତରେ କଗ ଯୋଗ କଲେ କଖ + ଖଗ + କଗ, କଗ + କଗ ବା

କଖର ଦ୍ୱିଗୁଣଠାରୁ ବଡ଼ । ଏହିପରି ପ୍ରମାଣ ହେବ ଯେ କଖ+କଗ+ଗଖ, କଖର ଦ୍ୱିଗୁଣଠାରୁ ବଡ଼ । ଅତ ତିନିବାହୁର ସମଷ୍ଟି କୌଣସି ଦୁଇ ବାହୁର ଦ୍ୱିଗୁଣ ଅପେକ୍ଷା କ୍ଷୁଦ୍ରତର ହେବ । କଖ+କଗ, ଖଗଠାରୁ ବଡ଼ (୨୦ ପୃଃ), ଏହି ଦୁଇ ବସ୍ତୁରେ କଖ ଓ କଗ ଯୋଗ କଲେ ୨କଖ+୨କଗ, କଖ+କଗ+ଖଗଠାରୁ ବୃହତ୍ତର (୪ର୍ଥ ସ୍ୱଃ) । ଏହିପରି ଅନ୍ୟାନ୍ୟ ବାହୁର ମଧ୍ୟ ପ୍ରମାଣ ହେବ । ଅତଏବ କୌଣସି ଦୁଇବାହୁର ଇତ୍ୟାଦି ।

୨୧ ଶ ପ୍ରତିଜ୍ଞାର ଅନୁଶୀଳନୀ ।

*୨ ଶ ଉପପାଦ୍ୟ ।

ତ୍ରିଭୁଜର ଅଭ୍ୟନ୍ତରସ୍ଥ କୌଣସି ବିନ୍ଦୁରୁ ତିନିକୋଣିକ ବିନ୍ଦୁ ପର୍ଯ୍ୟନ୍ତ ତିନିସରଳରେଖା ଟାଣିଲେ, ଏହି ତିନିରେଖା ଏକତ୍ରେ ତ୍ରିଭୁଜର ତିନି ବାହୁର ସମଷ୍ଟିର ଅର୍ଦ୍ଧେକ ଅପେକ୍ଷା ବୃହତ୍ତର, ମାତ୍ର ତିନିବାହୁର ସମଷ୍ଟିଠାରୁ କ୍ଷୁଦ୍ରତର ହେବ ।



କ ଖ ଗ ତ୍ରିଭୁଜର ଅଭ୍ୟନ୍ତରେ ଘ ଏକବିନ୍ଦୁ ନେଇ କଘ, ଖଘ ଓ ଗଘ ତିନୋଟି ରେଖା ଟାଣିଲେ ଏହି ତିନିରେଖା ଏକତ୍ରେ ତ୍ରିଭୁଜର ତିନିବାହୁର ସମଷ୍ଟିର ଅର୍ଦ୍ଧ ଅପେକ୍ଷା ବୃହତ୍ତର ଓ ତ୍ରିଭୁଜର ତିନିବାହୁର ସମଷ୍ଟିଠାରୁ କ୍ଷୁଦ୍ରତର ହେବ ।

କଘ+ଖଘ > କଖ (୨୦ଶ ପୃଃ) ଏହିପରି କଘ+ଗଘ > କଗ, ଓ ଖଘ+ଗଘ > ଖଗ; ∴ ୨କଘ+୨ଖଘ+୨ଗଘ > କଖ+କଗ+ଖଗ; କଘ+ଖଘ+ଗଘ > ½ (କଖ+କଗ+ଖଗ);

ପୁନଶ୍ଚ କଖ+କଗ > ଖଘ+ଗଘ (୨୧ଶ ପୃଃ); ଏହିପରି କଖ+ଖଗ > କଘ+ଗଘ; ଏବଂ ଖଗ+କଗ > କଘ+ଗଘ (୨୧ଶ ପୃଃ);

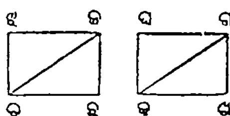
∴ ୨କଖ+୨କଗ+୨ଖଗ > ୨କଘ+୨ଖଘ+୨ଗଘ

∴ କଖ + କଗ + ଖଗ 7 ଜଘ + ଖଘ + ଗଘ । ଅତଏବ ତ୍ରିଭୁଜର ଅନ୍ତ୍ୟସ୍ଥ ପ୍ରମାଣିତ ହେଉଅଛି ।

୨୨ଶ ପ୍ରତିଜ୍ଞାର ଅନୁଶୀଳନୀ ।

୩୫ଶ ସମ୍ପାଦ୍ୟ ।

ଏକ ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ସରଳରୈଖିକ କ୍ଷେତ୍ରର ସମାନ ଆଉ ଏକ ସରଳ-ରୈଖିକ କ୍ଷେତ୍ର ଅଙ୍କିତ କରିବାକୁ ହେବ ।



କଖଗଘ ଗୋଟିଏ ସରଳରୈଖିକ କ୍ଷେତ୍ରର ସମାନ ଆଉ ଏକ ସରଳ-ରୈଖିକ କ୍ଷେତ୍ର ଅଙ୍କିତ କରିବାକୁ ହେବ । କଗ କର୍ଣ୍ଣ ଟାଣ; ପ୍ରଥମେ ଚଛଜ ତ୍ରିଭୁଜ ଏପରି ଅଙ୍କିତ କର ଯେପରି ଚଛ, ଛଜ ଓ ଚଜ ଭୂଜବାହୁ ଯଥାକ୍ରମେ କଖ, ଖଗ ଓ କଗ ଏ ତିନିବାହୁର ସହିତ ସମାନ ହେବ (୨୨ଶ ପ୍ରଃ); ପରେ ଚଜକୁ ଭୂମିସ୍ୱରୂପ ଅର୍ଥାତ୍ ୨୨ ଶ ପ୍ରତିଜ୍ଞାର ପର ମଧ୍ୟରେଖା କରି ତାହା ଉପରେ ଚଜଝ ତ୍ରିଭୁଜଟି ଏରୂପେ ଅଙ୍କିତ କର ଯେପରି ତାହାର ଚଝ ଓ ଝଜ ବାହୁ ଯଥାକ୍ରମେ କଘ ଓ ଘଗ ବାହୁର ସମାନ ହେବ; ତାହା ହେଲେ ସମସ୍ତ ଚଛଜଝ ସରଳରୈଖିକ କ୍ଷେତ୍ରଟି, କଖଗଘ ସରଳରୈଖିକ କ୍ଷେତ୍ରର ସମାନ ହୋଇ ଅଙ୍କିତ ହେବ ।

∵ △କଖଗ = △ଚଛଜ (୮ମ ଓ ୪ର୍ଥ ପ୍ରଃ); ଏବଂ △ କଗଘ = △ଚଜଝ ।

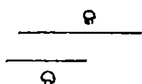
∴ କଖଗଘ କ୍ଷେତ୍ର = ଚଛଜଝ କ୍ଷେତ୍ର (୨ୟ ସ୍ୱୀ); ∴ ଏକ ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ସରଳରୈଖିକ ଇତ୍ୟାଦି ।

୨୩ଶ ପ୍ରତିଜ୍ଞାର ଅନୁଶୀଳନୀ ।

୩୪ଶ ସମ୍ପାଦ୍ୟ ।

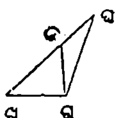
ଗୋଟିଏ ତ୍ରିଭୁଜର ଏକବାହୁ ଏବଂ ତାହାର ସନ୍ନିହିତ ଏକ କୋଣ

ଓ ଅନ୍ୟ ଦୁଇ ବାହୁର ସମଷ୍ଟି ଦତ୍ତଅଛି, ତ୍ରିଭୁଜଟି ଅଙ୍କିତ କରିବାକୁ ହେବ ।



ଚ କୌଣସି ତ୍ରିଭୁଜର ଭୂମି ଓ ଛ ଉକ୍ତ ଭୂମି ସଂଲଗ୍ନ କୋଣ; ଏବଂ କ ଅପର ଦୁଇବାହୁର ସମଷ୍ଟି ଦତ୍ତଅଛି; ତ୍ରିଭୁଜଟି ଅଙ୍କିତ କରିବାକୁ ହେବ ।



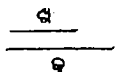


ଖଗ କୌଣସି ରେଖାକୁ ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ଚର ସମାନ କରି ଉକ୍ତ ଖଗ ରେଖାର ଖ ବିନ୍ଦୁରେ ଛ କୋଣର ସମାନ ଗଖଘ କୋଣ ଅଙ୍କିତ କର (୨୩ଶ ପ୍ରଃ); ଏବଂ ଖଘକୁ ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ କ ରେଖାର ସମାନ କରି ଗ ଓ ଘକୁ ସଂଯୁକ୍ତ କର । ପରେ ଗଘ ରେଖାର ଗ ବିନ୍ଦୁରେ ଖଘଗ କୋଣର ସମାନ ଘଗକ କୋଣ ଅଙ୍କିତ କର (୨୩ଶ ପ୍ରଃ); ଏବଂ ଗକକୁ ଖଘର ସହିତ କ ବିନ୍ଦୁରେ ଯୋଗ କର । ତାହା ହେଲେ କଖଗ, ସମ୍ପାଦ୍ୟ ତ୍ରିଭୁଜ ହେବ ।

∵ ∠କଘଗ = ∠କଗଘ (ଅଙ୍କନ), ∴ କଗ = କଘ (୬ଷ୍ଠ ପ୍ରଃ); ତାହା ହେଲେ କଖ + କଗ = କଖ + କଘ = ଖଘ = କ (୨ୟ ଓ ୧ମ ସ୍ୱଃ); ଏବଂ ଖଗ = ଚ ଓ ∠କଖଗ = ∠ଛ, ∴ କୌଣସି ତ୍ରିଭୁଜର ଭୂମି ଓ ତତ୍ସଂଲଗ୍ନ କୋଣ ଇତ୍ୟାଦି ।

୩୫ଶ ସମ୍ପାଦ୍ୟ ।

କୌଣସି ତ୍ରିଭୁଜର ଭୂମି ଓ ତତ୍ସଂଲଗ୍ନ ଗୋଟିଏ କୋଣ ଏବଂ ଅନ୍ୟ ଦୁଇ ବାହୁର ଅନ୍ତର ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ଅଛି ତ୍ରିଭୁଜଟି ଅଙ୍କିତ କରିବାକୁ ହେବ ।



କ କୌଣସି ତ୍ରିଭୁଜର ଭୂମି, ଖ ଅନ୍ୟ ଦୁଇ ବାହୁର ଅନ୍ତର ଓ ଖ ଭୂମି ସଂଲଗ୍ନ କୋଣ,



ତ୍ରିଭୁଜଟି ଅଙ୍କିତ କରିବାକୁ ହେବ ।

ଚଛ କୌଣସି ରେଖାକୁ ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ କରେଖାର ସମାନ କର, ଉକ୍ତ ଚଛ ରେଖାର ଚ ବିନ୍ଦୁରେ ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ଗ କୋଣର ସମାନ ଛଚଟ କୋଣ ଅଙ୍କିତ କର (୨୩ଶ ପ୍ରଃ); ଏବଂ ଚଟକୁ ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ଖ



ରେଖାର ସମାନ କର ଛଟ ସଂଯୁକ୍ତ କର । ପୁନଶ୍ଚ ଚଟକୁ ଜ ପର୍ଯ୍ୟନ୍ତ ବର୍ଦ୍ଧିତ କର, ଟଛ ରେଖାର ଛ ବିନ୍ଦୁରେ ଛଟଜ କୋଣର ସମାନ ଟଛଜ କୋଣ ଅଙ୍କିତ କର (୨୩ଶ ପ୍ର); ଛଜ ଓ ଟଜ ରେଖା ପରସ୍ପର ଜ ବିନ୍ଦୁରେ ମିଳିତ ହେଉ । ତେବେ ଚଛଜ ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ତ୍ରିଭୁଜ ହେବ ।

∵ ଛଜ=ଟଜ (୬ଷ୍ଠ ପ୍ରଃ); ∴ ଚଜ−ଛଜ=ଚଜ−ଟଜ =ଚଟ=ଖ, ଏବଂ ଚଛ=କ ଓ ∠ଛଚଜ=∠ଗ (ଅଙ୍କନ); ଅତଏବ କୌଣସି ତ୍ରିଭୁଜର ଇତ୍ୟାଦି ।

୨୪ଶ ପ୍ରତିଜ୍ଞାର ଅନୁଶୀଳନୀ ।

୩୬ଶ ଉପପାଦ୍ୟ ।

୨୪ଶ ପ୍ରତିଜ୍ଞାର ଚିତ୍ରରେ ପ୍ରମାଣ କର ଯେ ଙଛ ରେଖା, ଘଚ ରେଖାକୁ ଘ ଓ ଚର ମଧ୍ୟସ୍ଥିତ କୌଣସି ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରିବ ।

ଉକ୍ତ ପ୍ରତିଜ୍ଞାରେ ଘଛକୁ ଘଚର ସମାନ କରା ଯାଇଅଛି ଏବଂ କୁହା ଯାଇଅଛି ଯେ ଘଙ ଯେପରି ଘଚଠାରୁ ବୃହତ୍ତର ନୁହେ । ଙଛ ରେଖା ଘଚକୁ ଅଥବା ସମ୍ଭବ ହେଲେ ବର୍ଦ୍ଧିତ ଘଚକୁ ଢ ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରୁ ।

କାରଣ "ଘଙ କାହୁଁ ଘଚ ବା ଘଛଠାରୁ ବୃହତ୍ତର ନୁହେ"; ଅର୍ଥାତ୍ ଘଙ=ଘଛ ବା ଘଛ>ଘଙ; ∴ ∠ଘଙଛ=∠ଘଛଙ (୫ମ ପ୍ରଃ); ଅଥବା ∠ଘଙଛ>∠ଘଛଙ (୧୮ଶ ପ୍ରଃ); କିନ୍ତୁ

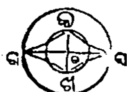
∠ଘଜଛ > ∠ଘଡଛ (୧୬ଶ ପ୍ର), ∴ ∠ଘଜଛ > ∠ଘଛଡ,
∴ ଘଛ > ଘଜ (୧୯ ଶ ପ୍ରଃ); ∴ ଘଚ > ଘଜ ସୁତରାଂ ଜ ବିନ୍ଦୁ ଘ ଓ ଚ ବିନ୍ଦୁଦ୍ୱୟର ମଧ୍ୟରେ କୌଣସି ସ୍ଥାନରେ ଅବସ୍ଥିତ ହେବ ଅର୍ଥାତ୍ ଡଛ ରେଖା, ଘଚ ରେଖାକୁ ଘ ଓ ଚ ବିନ୍ଦୁଦ୍ୱୟର ମଧ୍ୟରେ କୌଣସି ସ୍ଥାନରେ ଛେଦ କରିବ । ଅତଏବ ୨୪ଶ ପ୍ରତିଜ୍ଞାର ଚତ୍ୱରେ ଇତ୍ୟାଦି ।



୨୫ ଶ ପ୍ରତିଜ୍ଞାର ଅନୁଶୀଲନୀ ।

୩୭ ଶ ଉପପାଦ୍ୟ ।

ଦୁଇ ଐକକେନ୍ଦ୍ରିକ ବୃତ୍ତ ମଧ୍ୟରେ କ୍ଷୁଦ୍ରଟିର କଖ ବ୍ୟାସର ଦୁଇ ପ୍ରାନ୍ତରୁ ଉଭୟ ଦିଗରେ ବଡ଼ ବୃତ୍ତର ପରିଧି ପର୍ଯ୍ୟନ୍ତ, କଗ, କଘ ଏବଂ ଖଗ, ଖଘ ରେଖା ଟାଣିଲେ, ଯଦି କଗଟି କଘର ସମାନ ହୁଏ, ତେବେ ଖଗ, ଖଘର ସମାନ ହେବ, ଆଉ ଯେବେ କଗ, କଘଠାରୁ ବଡ଼ ହୁଏ, ତେବେ ଖଗ, ଖଘଠାରୁ କ୍ଷୁଦ୍ର, ଆଉ ଯେବେ କ୍ଷୁଦ୍ର ହୁଏ, ତେବେ ବୃହତ୍ତର ହେବ ।



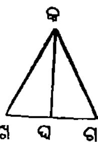
ଚ କେନ୍ଦ୍ରଠାରୁ ଚଗ ଓ ଚଘ ରେଖା ଟାଣ । କଚଗ ଓ କଚଘଏ ଦୁଇ ତ୍ରିଭୁଜର କଚ ସାଧାରଣ, ଏବଂ ଚଗ = ଚଘ, ଏକ୍ଷଣେ ଯଦି କଗ = କଘ ହୁଏ, ତେବେ ∠କଚଗ = ∠କଚଘ (୮ ମ ପ୍ରଃ); ସୁତରାଂ ∠ଖଚଗ = ∠ଖଚଘ (୧୩ ଶ ପ୍ରଃ ଅନୁ ସ୍ୱଃ); ∴ ଖଗ = ଖଘ (୪ର୍ଥ ପ୍ରଃ) । କିନ୍ତୁ ଯଦି କଗ > କଘ ହୁଏ, ତେବେ ∠କଚଗ > ∠କଚଘ (୨୫ଶ ପ୍ରଃ); ସୁତରାଂ ∠ଖଚଘ > ∠ଖଚଗ (୧୩ଶ ପ୍ରଃ); ∴ ଖଘ > ଖଗ (୨୪ଶ ପ୍ରଃ); ଆଉ ଯେବେ କଘ > କଗ ହୁଏ ତେବେ ∠କଚଘ > ∠କଚଗ (୨୫ଶ ପ୍ରଃ), ସୁତରାଂ ∠ଖଚଗ > ∠ଖଚଘ (୧୩ଶ ପ୍ରଃ), ∴ ଖଗ > ଖଘ (୨୪ଶ ପ୍ରଃ) । ଅତଏବ ଦୁଇ ଐକକେନ୍ଦ୍ରିକ ବୃତ୍ତ ଇତ୍ୟାଦି ।

୨୨ ଶ ପ୍ରତିଜ୍ଞାର ଅନୁଶୀଳନୀ ।

୩୮ ଶ ଉପପାଦ୍ୟ ।

ଯେବେ କୌଣସି ସରଳରେଖା, କୌଣସି ସମଦ୍ୱିବାହୁ ତ୍ରିଭୁଜର ଶୀର୍ଷ କୋଣକୁ ଦ୍ୱିଖଣ୍ଡ କରେ ତେବେ ସେହି ରେଖା ଉକ୍ତ ତ୍ରିଭୁଜର ଭୂମିକୁ ମଧ୍ୟ ଦ୍ୱିଖଣ୍ଡ କରିବ । ଆଉ ଭୂମିକୁ ଦ୍ୱିଖଣ୍ଡ କଲେ ଶୀର୍ଷ କୋଣକୁ ମଧ୍ୟ ଦ୍ୱିଖଣ୍ଡ କରିବ ଏବଂ ସେହି ରେଖା ଭୂମିର ଲମ୍ବ ହେବ ।

କଖଗ ଏକ ସମଦ୍ୱିବାହୁ ତ୍ରିଭୁଜର କ କୋଣକୁ କଘ ରେଖା ଦ୍ୱିଖଣ୍ଡ କଲେ, ଖଗ ଭୂମିକୁ ମଧ୍ୟ ଦ୍ୱିଖଣ୍ଡ କରିବ । ଆଉ ଯେବେ କଘ ରେଖା ଖଗ ଭୂମିକୁ ଦ୍ୱିଖଣ୍ଡ କରେ ତେବେ କ କୋଣକୁ ଦ୍ୱିଖଣ୍ଡ କରିବ ଏବଂ ଖଗ ଭୂମିର ଲମ୍ବ ହେବ ।

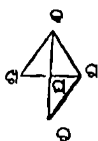


କଘ ରେଖା ଯେବେ କ କୋଣକୁ ଦ୍ୱିଖଣ୍ଡ କରେ ଓ ଖଗର ଘ ବିନ୍ଦୁରେ ମିଳିତ ହୁଏ, ତେବେ କଖଘ ଓ କଗଘ ଏ ଦୁଇ ତ୍ରିଭୁଜ ମଧ୍ୟରେ କଖ = କଗ, କଘ ସାଧାରଣ ଓ ∠ ଖକଘ = ∠ ଗକଘ ∴ ଖଘ ଭୂମି = ଗଘ ଭୂମି (୪ ଥି ପ୍ରଃ) । ଆଉ ଯେବେ କଘ ରେଖା ଖଗ ଭୂମିକୁ ଦ୍ୱିଖଣ୍ଡ କରେ ଓ କ ଶୀର୍ଷ ବିନ୍ଦୁରେ ମିଳିତ ହୁଏ, ତେବେ କଖ = କଗ, ଖଘ = ଗଘ, ଓ ∠ କଖଘ = ∠ କଗଘ, ∴ ∠ ଖକଘ = ∠ ଗକଘ ଏବଂ ∠ ଗଘକ = ∠ ଖଘକ, ∴ କଘ, ଖଗ ଭୂମିର ଲମ୍ବ (୧୦ମ ସ) । ∴ ଯେବେ କୌଣସି ସରଳରେଖା ଇତ୍ୟାଦି ।

୩୯ ଶ ଉପପାଦ୍ୟ ।

ଯେବେ କୌଣସି ସରଳରେଖା କୌଣସି ତ୍ରିଭୁଜର ଶୀର୍ଷ କୋଣ ଓ ଭୂମିକୁ ଦ୍ୱିଖଣ୍ଡ କରେ ତେବେ ତ୍ରିଭୁଜଟି ସମଦ୍ୱିବାହୁ ହେବ ।

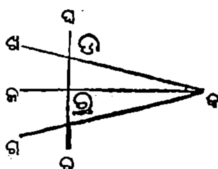
କଘ ସରଳରେଖା କଖଗ ତ୍ରିଭୁଜର କ ଶୀର୍ଷ କୋଣକୁ ଓ ଗଖ ଭୂମିକୁ ଦ୍ୱିଖଣ୍ଡ କରୁଅଛି, ତେବେ ତ୍ରିଭୁଜଟି ସମଦ୍ୱିବାହୁ ହେବ ।



କଘକୁ ଚ ପର୍ଯ୍ୟନ୍ତ ବୃଦ୍ଧି କରି ଘଚକୁ କଘର ସମାନ କର (୩ୟ ପ୍ରଃ) ଓ ଗଚ ସଂଯୁକ୍ତ କର । କଖଘ ଓ ଗଘଚ ଦୁଇ ତ୍ରିଭୁଜ ମଧ୍ୟରେ ଖଘ=ଗଘ (କଳ୍ପନା) କଘ=ଘଚ (ଅଙ୍କନ) ∠କଘଖ=∠ଗଘଚ (୧୫ ଶ ପ୍ରଃ); ∴କଖ ଭୂମି=ଚେଗ ଭୂମି ଓ ∠ଘଖକ=∠ଘଗଚ ଏବଂ ∠ଖକଘ=∠ଘଚଗ (୪ ର୍ଥ ପ୍ରଃ); ପୁନଶ୍ଚ ∠ଖକଘ=∠ଘଚଗ ଥିବାରୁ କଗଘ ଓ ଚଗଘ ଦୁଇ ତ୍ରିଭୁଜ ମଧ୍ୟରେ ∠ଗକଘ=∠ଗଚଘ, ∴କଗ=ଗଚ (୬ଷ୍ଠ ପ୍ରଃ); ପ୍ରଥମେ କଖ=ଗଚ ପ୍ରମାଣ ହୋଇଥିବାରୁ କଖ=କଗ (୧ମ ସ୍ୱଃ) ∴କଖଗ ତ୍ରିଭୁଜ ସମଦ୍ୱିବାହୁ (୨୫ ସଂଃ) । ଅତଏବ କୌଣସି ସରଳରେଖା ଇତ୍ୟାଦି ।

୪୦ ଶ ସାଧ୍ୟ ।

ଏକ ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ବିନ୍ଦୁଠାରୁ ଏପରି ଏକ ସରଳରେଖା ଟାଣିବାକୁ ହେବ, ଯେପରି ତାହା ପରସ୍ପର ଅବନତ ଦୁଇ ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ରେଖାର ସହିତ ସମାନ୨ କୋଣ ଉତ୍ପନ୍ନ କରିବ ।



ଘ ଏକ ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ବିନ୍ଦୁ ଓ କ ବିନ୍ଦୁରେ ଅବନତ କଖ ଓ କଗ ଦୁଇଟି ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ସରଳରେଖା, ଘ ବିନ୍ଦୁଠାରୁ ଏପରି ଏକ ସରଳରେଖା ଟାଣିବାକୁ ହେବ ଯେପରି ତାହା କଖ ଓ କଗର ସହିତ ସମାନ୨ କୋଣ ଉତ୍ପନ୍ନ କରେ ।

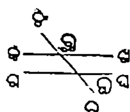
ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ କଖ ଓ କଗ ରେଖାର ଅବନତିଦ୍ୱାରା ଉତ୍ପନ୍ନ କ କୋଣକୁ କଜଦ୍ୱାରା ଦ୍ୱିଖଣ୍ଡ କର (୯ ମ ପ୍ରଃ), ଏବଂ ସେହି ରେଖା ଉପରେ

ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ଘ ବିନ୍ଦୁରୁ ଘଙ୍କ ଲମ୍ବ ଟାଣ (୧୨ ଶ ପ୍ରଃ); ଆଉ ବର୍ଦ୍ଧିତ ଘଙ୍କ ରେଖା କଖ ଓ କଗ ରେଖାକୁ ଯଥାକ୍ରମେ ଙ ଓ ଚ ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରୁ ତେବେ ଘଙଚ ରେଖା ନିର୍ଣ୍ଣେୟ ରେଖା ହେବ । ∵ ∠କଙଚ = ∠କଚଙ (୨୬ଶ ପ୍ରଃ); ∴ ଏକ ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟବିନ୍ଦୁ ଇତ୍ୟାଦି ।

୨୭ ଶ ପ୍ରତିଜ୍ଞାର ଅନୁଶୀଳନୀ ।

୪୧ ଶ ଉପପାଦ୍ୟ ।

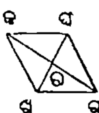
ଦୁଇ ସରଳରେଖା ଉପରେ ଅନ୍ୟ ଏକ ସରଳରେଖାର ସମ୍ପାତ ହେଲେ ଯେବେ ବହିସ୍ଥ ବିପର୍ଯ୍ୟସ୍ତ କୋଣଦ୍ୱୟ ଅର୍ଥାତ୍ ବଛଙ ଓ ଚଜଘ କୋଣ ପରସ୍ପର ସମାନ ହୁଏ, ତେବେ ଏହି ଦୁଇରେଖା ସମାନ୍ତର ହେବ ।



∵ ∠ବଛଙ = ∠ଚଜଘ (କଳ୍ପନା), ଏବଂ ∠କଛଙ = ∠ଖଛଜ (୧୫ ଶ ପ୍ରଃ); ଓ ∠ଚଜଘ = ∠ଗଜଛ (୧୫ ଶ ପ୍ରଃ); ∴ ∠ଖଛଜ = ∠ଗଜଛ (୧ ମ ସ୍ୱଃ); ∴ କଖ ‖ ଗଘ (୨୭ ଶ ପ୍ରଃ) ।

୪୨ ଶ ଉପପାଦ୍ୟ ।

ପ୍ରତିପନ୍ନ କର ଯେ ରମ୍ବସ ବା ଯେ ଚତୁର୍ଭୁଜର ସମ୍ମୁଖୀନ ବାହୁଗୁଡିକ ସମାନ, ସେ ସକଳ ସମାନ୍ତରିକ, ଆଉ ରମ୍ବସର କର୍ଣ୍ଣରେଖାଦ୍ୱୟ ପରସ୍ପର ଲମ୍ବଭାବେ ଛେଦ କରିବ ।

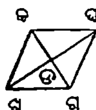


କଖଗଘ ରମ୍ବସ କ୍ଷେତ୍ରର କଖ, ଖଗ, ଗଘ ଓ ଘକ ପରସ୍ପର ସମାନ, ଅତଏବ କ୍ଷେତ୍ରଟି ସମାନ୍ତରିକ ହେବ । କଗ ଓ ଖଘ କର୍ଣ୍ଣରେଖା ଟାଣ । କଖଗ ଓ କଗଘ ଦୁଇ ତ୍ରିଭୁଜରେ କଖ = ଖଗ = ଗଘ = କଘ, କଗ ସାଧାରଣ ∴ ∠ଖକଗ = ∠କଗଘ (୮ ମ ପ୍ରଃ) । ∴ କଖ ‖ ଗଘ (୨୭ ଶ ପ୍ରଃ); ଏହିପରି କଘ ‖ ଖଗ ।

∴ କଖଗଘ କ୍ଷେତ୍ରଟି ସମାନ୍ତରିକ, ଆଉ କଗ ଓ ଖଘ ପରସ୍ପର ଲମ୍ବଭାବେ ଛେଦ କରିବ । କଖଗ ଓ କଘଗ ଦୁଇ ତ୍ରିଭୁଜ ମଧ୍ୟରେ ପ୍ରମାଣ ହେବ ଯେ ∠ଖକଗ = ∠ଗକଘ । ତେବେ ଖକଚ ଓ ଘକଚ ଦୁଇ ତ୍ରିଭୁଜର ଖକ = କଘ, ∠ଖକଚ = ∠ଚକଘ ଓ କଚ ସାଧାରଣ, ତାହାହେଲେ ଖଚ ଭୂମି = ଚଘ ଭୂମି ଏବଂ ଅବଶିଷ୍ଟ ∠କଚଖ = ∠କଚଘ (୪ ର୍ଥ ପ୍ରଃ) । ∴ କଚ, ଖଘ ଉପରେ ଲମ୍ବଭାବରେ ଅବସ୍ଥିତ (୧୦ ମ ସଂ) ।

୪୩ ଶ ଉପପାଦ୍ୟ ।

ଯେ ଚତୁର୍ଭୁଜର କର୍ଣ୍ଣଦ୍ୱୟ ପରସ୍ପରକୁ ଦ୍ୱିଖଣ୍ଡ କରେ, ତାହା ସମାନ୍ତରିକ । କଖଗଘ କୌଣସି ଚତୁର୍ଭୁଜର କଗ ଓ ଖଘ କର୍ଣ୍ଣଦ୍ୱୟ ପରସ୍ପରକୁ ଙ ବିନ୍ଦୁରେ ଦ୍ୱିଖଣ୍ଡ କରୁଅଛି, ଅତଏବ କଖଗଘ ଚତୁର୍ଭୁଜଟି ସମାନ୍ତରିକ ।

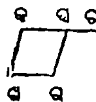


∵ କଙଘ ଓ ଗଙଖ ଦୁଇ ତ୍ରିଭୁଜର କଙ = ଗଙ; ଘଙ = ଖଙ, ∠କଙଘ = ∠ଗଙଖ (୧୫ ଶ ପ୍ରଃ), ∴ ∠ଙକଘ = ∠ଙଗଖ (୪ ର୍ଥ ପ୍ରଃ); ∴ କଘ ‖ ଖଗ (୨୭ ଶ ପ୍ରଃ); ଏହିପରି କଖ ‖ ଗଘ, ∴ କଖଗଘ ଚତୁର୍ଭୁଜଟି ସମାନ୍ତରିକ, ଅତଏବ ଯେ ଚତୁର୍ଭୁଜର କର୍ଣ୍ଣଦ୍ୱୟ ଇତ୍ୟାଦି ।

୨୮ ଶ ପ୍ରତିଜ୍ଞାର ଅନୁଶୀଳନୀ ।

୪୪ ଶ ଉପପାଦ୍ୟ ।

କଖଗଘ ଚତୁର୍ଭୁଜର ଖ କୋଣ ଯେବେ ଘ କୋଣର ସମାନ ହୁଏ, ଓ କଘ ବାହୁ ବୃଦ୍ଧି କଲେ, ବହିସ୍ଥ ଗଘଚ କୋଣ ଯେବେ କ କୋଣର ସମାନ ହୁଏ, ତେବେ କଖଗଘ କ୍ଷେତ୍ରଟି ସମାନ୍ତରିକ ହେବ ।



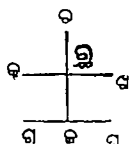
∵ ∠କ = ∠ଗଘଚ (କଳ୍ପନା) ∴ କଖ ‖ ଗଘ (୨୮ ଶ ପ୍ରଃ); ଏବଂ ∠ଖ = ∠ଘ (କଳ୍ପନା); ∴ ∠କ + ∠ଖ =

∠ଗଘଚ + ∠କଘଗ = ୨ ∠ସମ (୧୩ ଶ ପୃଃ) । ∴ କଘ ॥ ଖଗ (୬୮ ଶ ପୃଃ) । ∴ କଖଗଘ ଚତୁର୍ଭୁଜଟି ସମାନ୍ତରକ ।

୬୯ ଶ ପ୍ରତଜ୍ଞାର ଅନୁଶୀଳନୀ ।

୪୫ ଶ ଉପପାଦ୍ୟ ।

ଯେବେ କୌଣସି ସରଳରେଖା ଦୁଇ ସମାନ୍ତର ସରଳରେଖା ମଧ୍ୟରୁ ଗୋଟିକର ଲମ୍ବ ହୁଏ, ତେବେ ଅନ୍ୟର ମଧ୍ୟ ଲମ୍ବ ହେବ ।



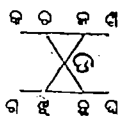
କଖ ଓ ଗଘ ଦୁଇଟି ସମାନ୍ତର ରେଖା, ଚଛ ରେଖା କଖର ଲମ୍ବ ହୋଇଅଛି, ଅତଏବ ଗଘର ମଧ୍ୟ ଲମ୍ବ ହେବ । ଚଛକୁ ବର୍ଦ୍ଧିତ କର ଗଘର ସହିତ ଜ ବିନ୍ଦୁରେ ମିଳିତ କର ।

କଖ ॥ ଗଘ ∴ ∠ଚଛଖ = ∠ଛଜଘ ଓ ∠ଚଛକ = ∠ଛଜଗ (୬୯ ଶ ପୃଃ); କିନ୍ତୁ ∠ଚଛଖ ଓ ∠ଚଛକ ପ୍ରତ୍ୟେକେ ସମକୋଣ । ∴ ∠ଛଜଗ ଓ ∠ଛଜଘ ସମକୋଣ ; ∴ ଚଛ ବା ଚଜ, ଗଘ ରେଖାର ଲମ୍ବ (୧୦ ମ ସଂ) ।

୪୬ ଶ ଉପପାଦ୍ୟ ।

ଦୁଇ ସମାନ୍ତର ସରଳରେଖାର ସଂଯୋଜକ ଅନ୍ୟ କୌଣସି ସରଳରେଖାର ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁ ଦେଇ ଦୁଇଟି ସମାନ୍ତର ରେଖା ପର୍ଯ୍ୟନ୍ତ ଯେ ସରଳରେଖା ଟଣା ଯିବ, ତାହା ମଧ୍ୟ ଏହି ବିନ୍ଦୁରେ ଦ୍ୱିଖଣ୍ଡିତ ହେବ ।

କଖ ଓ ଗଘ ଦୁଇଟି ସମାନ୍ତର ରେଖାର ସଂଯୋଜକ ଚଛ ରେଖାର ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁ ଡ ଦେଇ ଉକ୍ତ ସମାନ୍ତର ରେଖାଦ୍ୱୟ ପର୍ଯ୍ୟନ୍ତ ଯେ ସରଳରେଖା ଟଣା ଯିବ ତାହା ମଧ୍ୟ ସେହି ଡ ବିନ୍ଦୁରେ ଦ୍ୱିଖଣ୍ଡ ହେବ ।



ଚଛ ରେଖାର ଡ ବିନ୍ଦୁଦେଇ ଜଝ ରେଖା ଟାଣ, ତାହା ଯେପରି କଖ ଓ ଗଘର ସହିତ ଯଥାକ୍ରମେ ଜ ଓ ଝ ବିନ୍ଦୁରେ ମିଳିତ ହେଉ,

ତାହାହେଲେ ଙଜ ରେଖା ଙଠର ସମାନ ହେବ । କାରଣ; ∠ଙଚଜ = ∠ଙଛଠ (୨୯ ଶ ପ୍ରଃ); ∠ଚଙଜ = ∠ଛଙଠ (୧୬ ଶ ପ୍ରଃ); ଏବଂ ଙଚ = ଙଛ (କଳ୍ପନା) । ∴ ଙଜ = ଙଠ (୨୬ ଶ ପ୍ରଃ) । ଅତଏବ ଦୁଇ ସମାନ୍ତର ସରଳରେଖାର ଇତ୍ୟାଦି ।

୩୦ ଶ ପ୍ରତିଜ୍ଞାର ଅନୁଶୀଳନୀ ।

୪୭ ଶ ଉପପାଦ୍ୟ ।

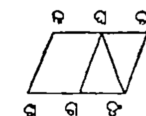
୩୦ ଶ ପ୍ରତିଜ୍ଞାର ତତ୍ୱରେ ଙଚ, କଖ ଓ ଗଘର ମଧ୍ୟରେ ନ ଥାଇ ଯେବେ ଏକ ଶାର୍ଶ୍ୱରେ ଥାଏ ତେବେ ପ୍ରତିଜ୍ଞା କପର ପ୍ରମାଣ ହେବ ।

ଙଚ କଖର ସମାନ୍ତର ଓ ଙଚ, ଗଘର ସମାନ୍ତର ଅଛି, ତେବେ କଖ ଗଘର ସମାନ୍ତର ହେବ ।

ଙଚ ଓ କଖ ଏ ଦୁଇ ସମାନ୍ତର ରେଖା ଉପରେ ଛଜଝ ରେଖା ପଡିଥିବାରୁ ∠ଙଛଜ = ∠ଛଜଖ ଅଉ ∠ଛଜଖ = ∠କଜଝ (୧୫ ଶ ପ୍ରଃ), ∴ ∠କଜଝ = ∠ଙଛଜ (୧ମ ସ୍ୱଃ) । ଆଉ ଙଚ ଓ ଗଘ ସମାନ୍ତରାଳ ରେଖା ଉପରେ ଛଜଝ ରେଖା ପଡିଥିବାରୁ ∠ଙଛଜ = ∠ଜଝଘ = ∠କଜଝ । ∴ କଜଝ ଓ ଜଝଘ ଦୁଇ ବିପର୍ଯ୍ୟସ୍ତ କୋଣ ସମାନ ହେବାରୁ କଖ ଓ ଗଘ ରେଖାଦ୍ୱୟ ସମାନ୍ତରାଳ (୨୯ ଶ ପ୍ରଃ); ଅତଏବ ୩୦ ପ୍ରତିଜ୍ଞାର ତତ୍ୱରେ ଇତ୍ୟାଦି ।

୪୮ ଶ ଉପପାଦ୍ୟ ।

କଖଗଘ ସାମନ୍ତରିକର ପରସ୍ପର ସମ୍ମୁଖୀନ କଘ ଓ ଖଗ ବାହୁଦ୍ୱୟ ଚ ଓ ଙ ପର୍ଯ୍ୟନ୍ତ ବୃଦ୍ଧି କରି ଘଚକୁ ଗଙର ସମାନ ଏବଂ ଙଚ ସଂଯୁକ୍ତ କରି ଦେଲେ କଖଙଚ ଗୋଟିଏ ସାମନ୍ତରିକ ହେବ ।



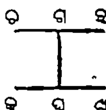
ଘଙ ରେଖା ଟାଣ । ଗଘଙ ଓ ଚଙଘ ଦୁଇ ତ୍ରିଭୁଜର ଗଙ=ଚଘ , ଘଙ ସାଧାରଣ ; ∠ଗଙଘ=∠ଚଘଙ (୨୯ ଶ ପ୍ରଃ); ∴∠ଗଘଙ=∠ଚଙଘ (୪ର୍ଥ ପ୍ରଃ), ∴ଗଘ ॥ ଚଙ (୨୭ ଶ ପ୍ରଃ) ∴କଖ ॥ ଚଙ (୩୦ ଶ ପ୍ରଃ); ∴ କଖଙଚ କ୍ଷେତ୍ରଟି ସମାନ୍ତରିକ ।

୩୧ ଶ ପ୍ରତିଜ୍ଞାର ଅନୁଶୀଳନୀ ।

୪୯ ଶ ଉପପାଦ୍ୟ ।

୩୧ଶ ପ୍ରତିଜ୍ଞାର ପ୍ରମାଣ ସ୍ଥଳରେ ୨୩ ଓ ୨୭ଶ ପ୍ରତିଜ୍ଞାର ସାହାଯ୍ୟ ନ ନେଇ ୧୧, ୧୨ ଓ ୨୮ ଶ ପ୍ରତିଜ୍ଞାର ସାହାଯ୍ୟଦ୍ୱାରା ପ୍ରମାଣ କର ।

ଗ ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ବିନ୍ଦୁଠାରୁ କଖର ସମାନ୍ତରାଳ କରି ଏକ ସରଳରେଖା ଟାଣିବାକୁ ହେବ । ଗ ବିନ୍ଦୁଠାରୁ କଖ ସରଳ-

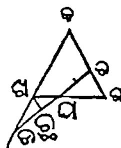


ରେଖା ଉପରେ ଗଘ ଲମ୍ବ ଟାଣ (୧୨ ଶ ପ୍ରଃ); ପୁନଶ୍ଚ ଗଘ ରେଖାର ଗ ବିନ୍ଦୁ ଉପରେ ଗଛ ଲମ୍ବ ଟାଣ (୧୧ ଶ ପ୍ରଃ); ଆଉ ଗଛକୁ ଚ ପର୍ଯ୍ୟନ୍ତ ବୃଦ୍ଧି କର, ଚଛ ରେଖା କଖର ସମାନ୍ତରାଳ ହେବ ।

∵ ∠ଗଘଖ+∠ଛଗଘ=୨∠ସମ ; ∴ଚଛ ॥ କଖ (୨୮ ଶ ପ୍ରଃ) । ଅତଏବ କୌଣସି ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ବିନ୍ଦୁ ଦେଇ ଇତ୍ୟାଦି ।

୫୦ ଶ ଉପପାଦ୍ୟ ।

ଏକ ଶୀର୍ଷକୋଣବିଶିଷ୍ଟ କେତେଗୁଡିଏ ତ୍ରିଭୁଜର ଭୂମି ଯେବେ କୌଣସି ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ବିନ୍ଦୁ ଦେଇ ଯାଏ , ତେବେ ଯେ ତ୍ରିଭୁଜର ଭୂମି ଏହି ବିନ୍ଦୁରେ ଦ୍ୱିଖଣ୍ଡ ହେବ, ସେହି ତ୍ରିଭୁଜଟି କ୍ଷୁଦ୍ରତମ ହେବ ।



କଖଗ ଓ କଙଚ ଦୁଇ ତ୍ରିଭୁଜର କ ଶୀର୍ଷ କୋଣଟି ସାଧାରଣ ଏବଂ ତାହାର ଖଗ ଓ ଙଚ ଭୂମି ଦୁଇଟି ଏକମାତ୍ର ଘ ବିନ୍ଦୁ ଦେଇ ଯାଇଅଛି । ତନ୍ମଧ୍ୟରୁ ଖଗ ଭୂମିଟି ଘ ବିନ୍ଦୁରେ ଦ୍ୱିଖଣ୍ଡ ହୋଇ-

ଅଛି । ଅତଏବ କଖଗ ତ୍ରିଭୁଜଟି କଙଚ ତ୍ରିଭୁଜଠାରୁ କ୍ଷୁଦ୍ରତର ହେବ । ଖ ବିନ୍ଦୁରୁ କଗ ରେଖାର ସମାନ୍ତର ଖଛ ରେଖା ଟାଣ, ତାହା ଘଙକୁ ଛ ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରୁ ।

△ଘଖଛ=△ଘଗଚ (୨୯, ୨୬ ଓ ୪ର୍ଥ ପ୍ରଃ); ∴ △ଘଖଙ > △ଘଚଗ; ଉଭୟରେ କଖଘଚ କ୍ଷେତ୍ରଟି ଯୋଗ କଲେ △କଙଚ > △କଖଗ । ∴ ଏକ ଶୀର୍ଷକୋଣବିଶିଷ୍ଟ ଇତ୍ୟାଦି ।

୪୧ ଶ ସମ୍ପାଦ୍ୟ ।

ଏକ ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ସୀମାବିଶିଷ୍ଟ ସରଳରେଖାକୁ ତିନି ସମାନ ଅଂଶରେ ବିଭକ୍ତ କରିବାକୁ ହେବ । କଖ ଏକ ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ସୀମାବିଶିଷ୍ଟ ସରଳରେଖା ଏହାକୁ ତିନି ସମାନ ଅଂଶରେ ବିଭକ୍ତ କରିବାକୁ ହେବ ।



କଖ ରେଖା ଉପରେ କଗଖ ସମବାହୁ ତ୍ରିଭୁଜ ଅଙ୍କିତ କର ତାହାର କ ଓ ଖ କୋଣକୁ କଘ ଓ ଖଘ ରେଖାଦ୍ୱାରା ଦ୍ୱିଖଣ୍ଡ କର ଏବଂ ଘ ବିନ୍ଦୁ ଦେଇ କଗର ସମାନ୍ତର ଏକ ରେଖା ଟାଣି ଖଗ ବାହୁକୁ ଙ ବିନ୍ଦୁରେ ଓ କଖ ବାହୁକୁ ଚ ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କର (୩୧ ଶ ପ୍ରଃ); ପୁନଶ୍ଚ ସେହି ଘ ବିନ୍ଦୁରୁ ଖଗ ବାହୁର ସମାନ୍ତର ଏକ ରେଖା ଟାଣି କଖକୁ ଛ ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କର (୩୧ ଶ ପ୍ରଃ) ।

∠ଗକଖ=∠ଘଚଛ, ∠ଗଖକ=∠ଘଛଚ ଏବଂ ∠ଗ=∠ଖଙଚ=∠ଚଘଛ; ∴ କଖଗ ସମବାହୁ ତ୍ରିଭୁଜର ତିନିଟି ସମାନ କୋଣ, ଘଚଛ ତ୍ରିଭୁଜର ତିନି କୋଣର ସମାନ ହେବାରୁ ଘଚଛ ତ୍ରିଭୁଜଟି ସମାନକୋଣୀ, ସୁତରାଂ ସମବାହୁ (୫ମ ଓ ୬ଷ୍ଠ ପ୍ରଃ), ପୁନଶ୍ଚ ∠ଚକଘ=∠ଘକଖ=∠କଘଚ (୨୯ ଶ ପ୍ରଃ); ∴ କଚ=ଘଚ (୬ ଷ୍ଠ ପ୍ରଃ); ଏବଂ ∠ଛଖଘ=∠ଘଖଗ=∠ଖଘଛ (୨୯ ଶ ପ୍ରଃ); ∴ ଖଛ=ଘଛ (୬ ଷ୍ଠ ପ୍ରଃ); ∴ କଚ,

ଚଛ ଓ ଛଖ ଯଥାକ୍ରମେ ଘଚଛ ସମବାହୁ ତ୍ରିଭୁଜର ଭିନ୍ନବାହୁର ସମାନ ହେବାରୁ ସେମାନେ ମଧ୍ୟ ସମାନ । ∴ କଖ ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ସୀମା-ବିଶିଷ୍ଟ ସରଳରେଖାଟି ଚ ଓ ଛ ବିନ୍ଦୁରେ ତିନି ସମାନ ଅଂଶରେ ବିଭକ୍ତ ହେଲା ।

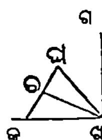
୩୨ ଶ ପ୍ରତିଜ୍ଞାର ଅନୁଶୀଳନୀ ।

୫୨ ଶ ସମ୍ପାଦ୍ୟ ।

ଏକ ସମକୋଣକୁ ତିନି ସମାନ ଅଂଶରେ ବିଭକ୍ତ କରିବାକୁ ହେବ ।

କଖଗ ଏକ ସମକୋଣ ଏହାକୁ ତିନି ସମାନଭାଗରେ ବିଭକ୍ତ କରିବାକୁ ହେବ ।

କଖ ରେଖା ଉପରେ କଖଘ ଏକ ସମବାହୁ ତ୍ରିଭୁଜ ଅଙ୍କିତ କର (୧ ମ ପ୍ରଃ); ଏବଂ କଖଘ କୋଣକୁ ଚଖ ଦ୍ୱାରା ଦ୍ୱିଖଣ୍ଡ କର (୯ ମ ପ୍ରଃ); ତାହାହେଲେ ଚଖ ଓ ଘଖ ଦ୍ୱାରା କଖଗ କୋଣଟି ତିନି ସମାନ ଅଂଶରେ ବିଭକ୍ତ ହେବ ।



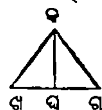
∵ ∠କ = ∠କଖଘ = ∠ଘ (୫ ମ ପ୍ରଃ ଅନୁମାନ); କିନ୍ତୁ ∠କ + ∠କଖଘ + ∠ଘ = ୨ ∠ସମ (୩୨ ଶ ପ୍ରଃ) ତାହାହେଲେ ∠କଖଘ = $\frac{୨}{୩}$ ∠ ସମ ହେବାରୁ ଅବଶିଷ୍ଟ ∠ଘଖଗ = $\frac{୧}{୩}$ ∠ସମ । ଆଉ କଖଘ କୋଣଟି ଚଖ ଦ୍ୱାରା ଦ୍ୱିଖଣ୍ଡ ହୋଇଥିବାରୁ ∠କଖଚ = ∠ଚଖଘ = ∠ଘଖଗ = $\frac{୧}{୩}$ ∠ସମ । ∴ କଖଗ ସମକୋଣଟି ଚଖ ଓ ଘଖ ଦ୍ୱାରା ତିନି ସମାନ ଅଂଶରେ ବିଭକ୍ତ ହେଲା ।

୪୩ ଶ ଉପପାଦ୍ୟ ।

ତ୍ରିଭୁଜର ଶୃଙ୍ଗ ଓ ଭୂମିର ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁ ସଂଯୋଜକ ସରଳରେଖା, ଭୂମି ଅର୍ଦ୍ଧର ସମାନ ହେଲେ ଶୃଙ୍ଗସ୍ଥ କୋଣ ସମକୋଣ, ଆଉ ଅର୍ଦ୍ଧଠାରୁ ବଡ ହେଲେ ସୂକ୍ଷ୍ମକୋଣ ଓ କ୍ଷୁଦ୍ର ହେଲେ ସ୍ଥୂଳକୋଣ ହେବ ।

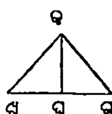
କଖଗ କୌଣସି ତ୍ରିଭୁଜର କ ଶୀର୍ଷବିନ୍ଦୁଠାରୁ ଭୂମି ଦ୍ୱିଖଣ୍ଡକାରକ କଘ ରେଖାଟି ଯେବେ ଖଗ ଭୂମିର ଅର୍ଦ୍ଧକର ସମାନ ହୁଏ ତେବେ ଖକଗ କୋଣଟି ସମକୋଣ ହେବ ।

∵ କଘ = ଖଘ = ଗଘ, ∴ ∠ଖ = ∠ଖକଘ (୫ମ ପ୍ରଃ); ଏବଂ ∠ଗ = ∠ଗକଘ (୫ ମ ପ୍ରଃ), ∴ ∠ଖ + ∠ଗ = ∠ଖକଗ (୨ ସ୍ୱ ସ୍ୱଃ), କିନ୍ତୁ କଖଘ ତ୍ରିଭୁଜର ଅନ୍ତରସ୍ଥ ତିନକୋଣ ଏକତ୍ରେ ଦୁଇ ସମକୋଣ (୩୨ ଶ ପ୍ରଃ); ଓ କଗଘ ତ୍ରିଭୁଜର କୋଣ ସବୁ ମଧ୍ୟ ଦୁଇ ସମକୋଣ (୩୨ ଶ ପ୍ରଃ); ଆଉ କଘଖ କୋଣ ଓ କଘଗ କୋଣ ଏକତ୍ରେ ଦୁଇ ସମକୋଣ (୧୩ ଶ ପ୍ରଃ); ∴ ∠ଖ + ∠ଗ + ∠ଖକଘ + ∠ଗକଘ = ୨ ∠ସମ । କିନ୍ତୁ ∠ଖ + ∠ଗ = ∠ଖକଘ + ∠ଗକଘ ପ୍ରମାଣ ହୋଇଅଛି; ∴ ∠ଖକଗ = ୧ ∠ସମ ।



ଆଉ ଯେବେ ଅର୍ଦ୍ଧକ ଅପେକ୍ଷା ବଡ ହୁଏ ତେବେ ସୂକ୍ଷ୍ମକୋଣ ହେବ । ∵ କଘ > ଖଘ ବା ଗଘ ∴ ∠ଖ > ∠ଖକଘ; ଓ ∠ଗ > ∠ଗକଘ (୧୮ ଶ ପ୍ରଃ) ∴ ∠ଖ + ∠ଗ > ∠ଖକଗ; କିନ୍ତୁ ∠ଖ + ∠ଗ + ∠ଖକଗ = ୨ ∠ସମ (୩୨ ଶ ପ୍ରଃ); ∴ ∠ଖକଗ ଏକ ସମକୋଣଠାରୁ କ୍ଷୁଦ୍ର ଅର୍ଥାତ୍ ସୂକ୍ଷ୍ମକୋଣ ।

ଆଉ ଯେବେ କଘ ଖଘ ଅପେକ୍ଷା କ୍ଷୁଦ୍ର ହୁଏ ତେବେ ସ୍ଥୂଳକୋଣ ହେବ। ∵ ଖଘ ବା ଗଘ $>$ କଘ, ∴ ∠ଖକଗ $>$ ∠ଖ + ∠ଗ (୧୮ ପ୍ରଃ ୨ୟ ସ୍ୱଃ) ; ଅତଏବ ଖକଗ କୋଣ ଏକ ସମକୋଣ ଅପେକ୍ଷା ବୃହତ୍ତର ଅର୍ଥାତ୍ ସ୍ଥୂଳକୋଣ । ଅତଏବ ତ୍ରିଭୁଜର ଶୃଙ୍ଗ ଓ ଭୂମିର ମଧ୍ୟବନ୍ଦୁ ଇତ୍ୟାଦି ।



୫୪ ଶ ଉପପାଦ୍ୟ ।

କୌଣସି ପଞ୍ଚଭୁଜର ବାହୁଗୁଡ଼ିକ ଉଭୟ ପାର୍ଶ୍ୱରେ ବୃଦ୍ଧି କଲେ ; ସେମାନେ ପରସ୍ପର ସଂଲଗ୍ନ ହୋଇ ଯେଉଁ କୋଣ ଉତ୍ପନ୍ନ କରିବେ, ସେମାନଙ୍କର ସମଷ୍ଟି ଦୁଇ ସମକୋଣର ସମାନ ହେବ ।

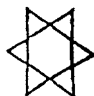


ଯେହେତୁ ପଞ୍ଚଭୁଜ କ୍ଷେତ୍ରର ପାଞ୍ଚଟି ଭୁଜର ଉପର ଅଙ୍କିତ ପାଞ୍ଚ ତ୍ରିଭୁଜର ଅନ୍ତରସ୍ଥ କୋଣଗୁଡ଼ି ଏକତ୍ରେ ୧୦ ସମକୋଣର ସମାନ (୩୨ ଶ ପ୍ରଃ) ତନ୍ମଧ୍ୟରୁ ପ୍ରତ୍ୟେକ ତ୍ରିଭୁଜର ଭୂମିସଂଲଗ୍ନ ଦୁଇ ଦୁଇଟି କୋଣ ଏକତ୍ରେ ୮ ସମକୋଣର ସମାନ (୩୨ ଶ ପ୍ରଃ ୨ୟ ଅନୁଃ), ତାହା ହେଲେ ଅବଶିଷ୍ଟ ଶୃଙ୍ଗସ୍ଥ ପାଞ୍ଚଟି କୋଣ ଏକତ୍ରେ ଦୁଇ ସମକୋଣର ସମାନ । ଅତଏବ କୌଣସି ପଞ୍ଚଭୁଜର ଇତ୍ୟାଦି ।

୫୫ ଶ ଉପପାଦ୍ୟ ।

ଷଡ଼ଭୁଜ କ୍ଷେତ୍ରର ବାହୁଗୁଡ଼ିକୁ ଉଭୟ ପାର୍ଶ୍ୱରେ ବୃଦ୍ଧି କଲେ, ସେମାନେ ପରସ୍ପର ସଂଲଗ୍ନ ହୋଇ ଯେଉଁ କୋଣ ଉତ୍ପନ୍ନ କରିବେ ସେମାନଙ୍କର ସମଷ୍ଟି ଚାରି ସମକୋଣର ସମାନ ହେବ ।

ଯେହେତୁ ଷଡ଼ଭୁଜ କ୍ଷେତ୍ରର ଛଅଟି ଭୁଜର ଉପର ଅଙ୍କିତ



ଛଅଟି ତ୍ରିଭୁଜର ଅନ୍ତରସ୍ଥ କୋଣଗୁଡ଼ିକ ଏକତ୍ରେ ୧୨ ସମକୋଣର ସମାନ (୩୨ଶ ପ୍ରଃ) ; ତନ୍ମଧ୍ୟରେ ପ୍ରତ୍ୟେକ ତ୍ରିଭୁଜର ଭୂମିସଂଲଗ୍ନ ଦୁଇ ଦୁଇଟି କୋଣ ଏକତ୍ରେ ୮ ସମକୋଣର ସମାନ (୩୨ ଶ ପ୍ରଃ ୨ୟ ଅନୁଃ) । ତାହାହେଲେ ଅବଶେଷ ଶୃଙ୍ଗସ୍ଥ ଛଅଟି କୋଣ ଏକତ୍ରେ ଚାରିସମକୋଣର ସମାନ । ଅତଏବ ଷଡ଼ଭୁଜ କ୍ଷେତ୍ରର ଇତ୍ୟାଦି ।

୩୩ ଶ ପ୍ରତିଜ୍ଞାର ଅନୁଶୀଳନୀ ।

୫୭ ଉପପାଦ୍ୟ ।

କୌଣସି ତ୍ରିଭୁଜର ଦୁଇ ବାହୁର ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁଦ୍ୱୟକୁ ସଂଯୁକ୍ତ କଲେ ଯୋଜକ ରେଖା ତୃତୀୟ ବାହୁର ସମାନ୍ତର ଓ ତାହାର ଅର୍ଦ୍ଧ ହେବ ।



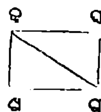
କ ଖ ଗ ଏକ ତ୍ରିଭୁଜ ଏହାର କ ଖ ଓ କଗ ବାହୁଦ୍ୱୟର ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁ ଘ ଓ ଙ; ସରଳରେଖାଦ୍ୱାରା ସଂଯୁକ୍ତ ହୋଇଅଛି । ତେବେ ଘଙ, ଖ ଗର ସମାନ୍ତର ଓ ଅର୍ଦ୍ଧେକ ହେବ ।

ଗଚକୁ କଖର ସମାନ୍ତର କରି ଟାଣ ଓ ଘଙକୁ ଚ ପର୍ଯ୍ୟନ୍ତ ବୃଦ୍ଧି କର । କଖ ଓ ଗଚ ସମାନ୍ତର ସରଳରେଖା ଉପରେ ଘଚ ଓ କଗ ପଡ଼ିଥିବାରୁ ∠କଘଚ=∠ଘଚଗ ଓ ∠ଘକଙ=∠ଙଗଚ, ଆଉ (୧୫ ଶ ପ୍ରଃ) ∠କଙଘ=∠ଗଙଚ ; କଙ=ଙଗ ଅଛି, ସୁତରାଂ କଘ=ଗଚ ଓ ଘଙ=ଙଚ (୨୬ ଶ ପ୍ରଃ) । କଘ=ଘଖ ଏହେତୁ ଘଖ=ଗଚ, ∴ ଘଚ ‖ ଖଗ ଓ ସମାନ (୩୩ ଶ ପ୍ର) । ଘଙ ବାହୁ ଘଚ ର ଅର୍ଦ୍ଧେକ ପ୍ରମାଣ ହୋଇଅଛି, ସୁତରାଂ ଘଙ ବାହୁ ଖଗ ର ଅର୍ଦ୍ଧେକ । ଅତଏବ କୌଣସି ତ୍ରିଭୁଜର ଇତ୍ୟାଦି ।

୬୪ ଶ ପ୍ରତିଜ୍ଞାର ଅନୁଶୀଲନୀ ।

୫୭ ଉପପାଦ୍ୟ ।

ଯେବେ କୌଣସି ଚତୁର୍ଭୁଜ କ୍ଷେତ୍ରର ସମ୍ମୁଖସ୍ଥ ବାହୁ ଓ କୋଣ ସମାନ ହୁଏ; ତାହାହେଲେ ସେହି କ୍ଷେତ୍ର ସମାନ୍ତରାଳ ହେବ ।

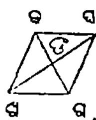


କଖଗଘ ଗୋଟିଏ ଚତୁର୍ଭୁଜ, ଏହାର ସମ୍ମୁଖସ୍ଥ କଖ=ଗଘ, କଘ=ଖଗ; ∠ଖକଘ=∠ଖଗଘ ଏବଂ ∠କଖଗ=∠କଘଗ ଅଛି ତେବେ କ୍ଷେତ୍ରଟି ସମାନ୍ତରାଳ ହେବ । ଏହା ପ୍ରମାଣ କର ।

କଖଘ ଓ ଖଗଘ ଦୁଇ ତ୍ରିଭୁଜ ମଧ୍ୟରେ କଖ=ଗଘ; କଘ=ଖଗ ଓ ∠ଖକଘ=∠ଖଗଘ (ଦତ୍ତ); ତେବେ ଅବଶିଷ୍ଟ ∠କଘଖ =∠ଘଖଗ (୪ ର୍ଥ ପ୍ରଃ), ମଧ୍ୟ ଏମାନେ ବ୍ୟତ୍ୟସ୍ତ କୋଣ, ∴ କଘ ∥ ଗଖ (୨୭ ଶ ପ୍ରଃ) । କଘ ଓ ଖଗ ର ପ୍ରାନ୍ତଦ୍ୱୟର ସଂଯୁକ୍ତକାରକ କଖ ଓ ଗଘ ମଧ୍ୟ ସମାନ୍ତରାଳ (୩୩ ପ୍ରଃ) । ∴ କଖ ଗଘ କ୍ଷେତ୍ରଟି ସମାନ୍ତରାଳ ।

୫୮ ଉପପାଦ୍ୟ ।

ସମାନ୍ତରାଳ ଚତୁର୍ଭୁଜର କର୍ଣ୍ଣଦ୍ୱୟ ପରସ୍ପରକୁ ଦ୍ୱିଖଣ୍ଡ କରେ; ଆଉ ଯେଉଁ ଚତୁର୍ଭୁଜର କର୍ଣ୍ଣଦ୍ୱୟ ପରସ୍ପରକୁ ଦ୍ୱିଖଣ୍ଡ କରେ ସେ ସମାନ୍ତରାଳ ।



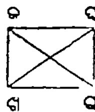
କଖଗଘ କୌଣସି ସମାନ୍ତରାଳର କଗ ଓ ଖଘ କର୍ଣ୍ଣଦ୍ୱୟ ପରସ୍ପର ଙ ବିନ୍ଦୁରେ ଛିନ୍ନ ହୋଇଅଛି ତେବେ କଙ, ଗଙ ର ଓ ଖଙ, ଘଙ ର ସମାନ ହେବ । କଙଘ ଓ ଖଙଗ ଦୁଇ ତ୍ରିଭୁଜର ∠ଙକଘ=∠ଙଗଖ, ଆଉ ∠କଘଙ=∠ଙଖଗ (୨୯ ଶ ପ୍ରଃ) ଏବଂ କଘ=ଖଗ (୩୪ ଶ ପ୍ରଃ) । ∴ କଙ=ଗଙ ଓ ଘଙ=ଖଙ (୨୬ ଶ ପ୍ର) ।

କଙଘ ଓ ଖଙଗ ଏ ଦୁଇ ତ୍ରିଭୁଜ ମଧ୍ୟରେ କଙ=ଙଗ; ଖଙ=ଙଘ; ଓ ∠କଙଘ=∠ଖଙଗ; ଅତଏବ କଘ=ଖଗ ଓ ∠କଘଙ=∠ଙଖଗ (୪ ର୍ଥ ପ୍ରଃ) ! ଏଣୁ କଘ ଓ ଖଗ ସରଳରେଖା ଉପରେ ଘଖ ରେଖା ପଡ଼ି ବିପର୍ଯ୍ୟସ୍ତ କୋଣଦ୍ୱୟ ସମାନ କରିବାରୁ କଘ ॥ ଖଗ (୨୭ ଶ ପ୍ରଃ) । ଏହିପରି ପ୍ରମାଣ ହେବ ଯେ କଖ ॥ ଗଘ, ଅତଏବ କଖଗଘ କ୍ଷେତ୍ରଟି ସମାନ୍ତରକ ।

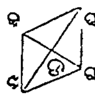
୬୯ ଉପପାଦ୍ୟ ।

ସମକୋଣୀ ସମାନ୍ତରକର କର୍ଣ୍ଣଦ୍ୱୟ ପରସ୍ପର ସମାନ, ଏବଂ ବିଷମକୋଣୀ ସମାନ୍ତରକର ସୂକ୍ଷ୍ମକୋଣଦ୍ୱୟର ସଂଯୋଜକ କର୍ଣ୍ଣରେଖା ଅପର କର୍ଣ୍ଣ ଅପେକ୍ଷା ବୃହତ୍ତର ହେବ ।

କଖଗଘ ଗୋଟିଏ ସମକୋଣୀ ସମାନ୍ତରକ, ତାହାର କଗ ଓ ଖଘ କର୍ଣ୍ଣଦ୍ୱୟ ପରସ୍ପର ସମାନ ହେବ, କାରଣ କଖଗ ଓ ଘଗଖ ଏ ଦୁଇ ତ୍ରିଭୁଜର କଖ=ଘଗ (୩୪ ଶ ପ୍ରଃ) । ଖଗ ସାଧାରଣ ଓ ∠କଖଗ=∠ଘଗଖ (୧୧ ଶ ସ୍ୱତଃ) ; ∴ କଗ କର୍ଣ୍ଣ=ଖଘ କର୍ଣ୍ଣ (୪ର୍ଥ ପ୍ରଃ), ଅତଏବ ସମକୋଣୀ ସମାନ୍ତରକର କର୍ଣ୍ଣଦ୍ୱୟ ଇତ୍ୟାଦି ।

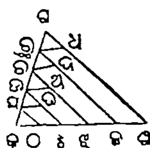


ପୁନଶ୍ଚ କଖଗଘ ସମାନ୍ତରକର ଖ ଓ ଘ ଦୁଇଟି ସୂକ୍ଷ୍ମକୋଣ ଓ କ ଓ ଗ କୋଣ ଦୁଇଟି ସ୍ଥୂଳ; ସୁତରାଂ କଖଘ ଓ କଖଗ ଦୁଇ ତ୍ରିଭୁଜର କଘ=ଖଗ (୩୪ ଶ ପ୍ରଃ); କଖ ସାଧାରଣ; କିନ୍ତୁ ∠ଖକଘ > ∠କଖଗ; ∴ ଖଘ > କଗ (୨୪ ଶ ପ୍ରଃ) । ଅତଏବ ବିଷମକୋଣୀ ସମାନ୍ତରକର ଇତ୍ୟାଦି ।



୭୦ ସମ୍ପାଦ୍ୟ ।

କୌଣସି ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ସୀମାବଚ୍ଛିନ୍ନ ସରଳରେଖାକୁ ଯେତେଗୁଡ଼ିଏ ସମାନ ଅଂଶରେ ବିଭକ୍ତ କରିବାକୁ ହେବ ।

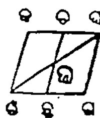


କଖ ଏକ ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ସୀମାବିଶିଷ୍ଟ ସରଳରେଖାକୁ ଟିକେଟିଗୁଡିଏ (ଅର୍ଥାତ୍ ପାଞ୍ଚ ସମାନ) ଅଂଶରେ ବିଭକ୍ତ କରିବାକୁ ହେବ । କଖ ରେଖାର କ ବିନ୍ଦୁରେ ନମ୍ର କରି କୌଣସି ଏକ କଗ ରେଖା ଟାଣ । ପରେ କଗ ରେଖାରେ ଘ ନାମକ କୌଣସି ବିନ୍ଦୁ ନେଇ ଘଗ ରେଖାରୁ କଘ ର ସମାନ କରି ଘଙ, ଙଚ, ଚଛ, ଓ ଛଗ ଅଂଶଗୁଡିକୁ ଛେଦ କର (୩ ଯ୍ ପ୍ରଃ); ଖଗ ସଂଯୁକ୍ତ କରି ଘ, ଙ, ଚ, ଛ ବିନ୍ଦୁଠାରୁ ଖଗ ର ସମାନ୍ତରଲେ କରି ଛଜ, ଚଝ, ଙଟ ଓ ଘଠ ରେଖାଗୁଡିକ ଟାଣ (୩୧ ଶ ପ୍ରଃ) । ତହିଁରେ କଖ ରେଖା ଠ, ଟ, ଝ, ଜ ବିନ୍ଦୁରେ ପାଞ୍ଚ ସମାନ ଅଂଶରେ ବିଭକ୍ତ ହେବ ।

ଘ, ଙ, ଚ, ଛ ବିନ୍ଦୁଠାରୁ କଖ ର ସମାନ୍ତରାଳ କରି ଘତ, ଙଥ, ଚଦ, ଛଧ ରେଖାମାନ ଟାଣ (୩୧ ଶ ପ୍ରଃ); କଘଠ ଓ ଘଙତ ଦୁଇ ତ୍ରିଭୁଜର ∠କ = ∠ଙଘତ (୨୯ ଶ ପ୍ରଃ); ∠କଘଠ = ∠ଘଙତ (୨୯ ଶ ପ୍ରଃ); କଘ = ଘଙ (କ୍ରିୟା); ∴ କଠ = ଘତ (୨୬ ଶ ପ୍ରଃ) । ଏହିପରି ଘତ = ଙଥ = ଚଦ = ଛଧ । ପୁନଶ୍ଚ ଘତ, ଙଥ, ଚଦ, ଛଧ ଯଥାକ୍ରମେ ଠଟ, ଟଝ, ଝଜ ଓ ଜଖ ର ସହିତ ସମାନ (୩୪ ଶ ପ୍ରଃ); ∴ କଠ = ଠଟ = ଟଝ = ଝଜ = ଜଖ । ଅତଏବ କୌଣସି ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ସୀମାବିଶିଷ୍ଟ ସରଳରେଖାକୁ ଇତ୍ୟାଦି ।

୭୧ ସମ୍ପାଦ୍ୟ ।

କୌଣସି ସାମାନ୍ତରିକର ଏକବାହୁସ୍ଥିତ କୌଣସି ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ବିନ୍ଦୁଠାରୁ ଏକ ସରଳରେଖା ଟାଣି ସମାନ୍ତରିକକୁ ଦ୍ୱିଖଣ୍ଡ କରିବାକୁ ହେବ ।



କଖଗଘ ଏକ ସମାନ୍ତରିକ ଏବଂ ଚ, କଘ ବାହୁସ୍ଥିତ ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ବିନ୍ଦୁ; ଚ ବିନ୍ଦୁଠାରୁ ଏକ ରେଖା ଟାଣି ସମାନ୍ତରିକକୁ ଦ୍ୱିଖଣ୍ଡ କରିବାକୁ ହେବ । କଖଗଘ ସମା-

ନ୍ତରକର ଖଘ କର୍ଣ୍ଣକୁ ଛ ବିନ୍ଦୁରେ ଦ୍ୱିଖଣ୍ଡ କର ଚଜ ଯୋଗ କର; ଏବଂ ଚଜ ବର୍ଦ୍ଧିତ କଲେ ତଦ୍ଦ୍ୱାରା ସମାନ୍ତରକଟି ଦ୍ୱିଖଣ୍ଡ ହେବ, କାରଣ ଯେବେ ବର୍ଦ୍ଧିତ ଚଜ ରେଖା ଖଗକୁ ଝ ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରେ ତେବେ △ଖଜଝ=△ଘଛଚ (୨୯; ୨୬; ୪ ର୍ଥ ପ୍ରଃ)। ସୁତରାଂ ଉଭୟରେ କଖଜଚ କ୍ଷେତ୍ରଟି ଯୋଗ କଲେ କଖଚଝ କ୍ଷେତ୍ରଟି କଖଘ ତ୍ରିଭୁଜର ସମାନ । କିନ୍ତୁ କଖଘ ତ୍ରିଭୁଜଟି କଖଗଘ ସମାନ୍ତରକର ଅର୍ଦ୍ଧ (୩୪ ପ୍ରଃ); ∴କଖଚଝ କ୍ଷେତ୍ରଟି କଖଗଘ ସମାନ୍ତରକର ଅର୍ଦ୍ଧ । ∴ଚଝ ରେଖାଦ୍ୱାରା ସମାନ୍ତରକଟି ଦ୍ୱିଖଣ୍ଡ ହେଲା ।

୬୨ ଉପପାଦ୍ୟ ।

ଯେ ସମାନ୍ତରକର ନିକଟବର୍ତ୍ତୀ ଦୁଇଟି ବାହୁ ସମାନ ଏବଂ ତାହାର ମଧ୍ୟଗତ କୋଣଟି ସମକୋଣ; ସେ ସମଚତୁର୍ଭୁଜ ହେବ ।

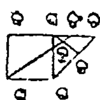
କଖଗଘ କୌଣସି ସମାନ୍ତରକର କଖ=ଖଗ; ଏବଂ ∠ଖ= ସମକୋଣ; କଖଗଘ ସମାନ୍ତରକଟି ସମଚତୁର୍ଭୁଜ ହେବ ।

ଗଘ=କଖ=ଖଗ=କଘ (୩୪ ଶ ପ୍ରଃ); ଆଉ ∠ଖ+∠କ=୨∠ସମ (୨୯ ଶ ପ୍ରଃ), ତନ୍ମଧ୍ୟରୁ ∠ଖ ସମକୋଣ; ତାହାହେଲେ ∠କ ମଧ୍ୟ ସମକୋଣ; ∴∠ଗ=∠କ=∠ଖ=∠ଘ (୩୪ ଶ ପ୍ରଃ); ∴କଖଗଘ ସମାନ୍ତରକର ଚାରିଟି ବାହୁ ସମାନ ଓ ଚାରିଟି କୋଣ ପ୍ରତ୍ୟେକେ ସମକୋଣ ହେବାରୁ ଏହା ସମଚତୁର୍ଭୁଜ (୩୦ ସଂ)।

୩୫ ଶ ପ୍ରତିଜ୍ଞାର ଅନୁଶୀଳନୀ ।

୬୩ ଉପପାଦ୍ୟ ।

ସମାନ ୨ ସମାନ୍ତରାଳ କ୍ଷେତ୍ର ଏକ ଭୂମି ଉପରେ ଏବଂ ଏକପାର୍ଶ୍ୱରେ ଥିଲେ ଏକ ସମାନ୍ତରାଳ ମଧ୍ୟରେ ରହିବେ ।

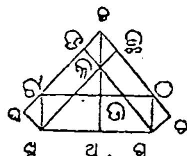


କଖଗଘ ଓ ଙଖଗଚ ଦୁଇଟି ସମାନ୍ତରିକ ଗୋଟିଏ ଭୂମି ଉପରେ ଏକ ଦିଗରେ ଅଛି ଅତଏବ ଏ ଦୁହେଁ ଏକ ସମାନ୍ତରାଳ ମଧ୍ୟରେ ଅର୍ଥାତ୍ କଘ ଓ ଙଚ ଏକ ରେଖାରେ ରହିବେ ।

ଯଦି କଘ ଓ ଙଚ ଏକ ରେଖାରେ ନ ଥାଏ ତେବେ କଘ କୁ ବୃଦ୍ଧି କଲେ ଯେପରି ତାହା ଖଙ ଓ ଗଚ କୁ ଯଥାକ୍ରମେ ଛ ଓ ଜ ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରୁ । ∴ □ କଖଗଘ = □ ଛଖଗଜ (୩୫ ଶ ପ୍ରଃ) କିନ୍ତୁ □ କଖଗଘ = □ ଙଖଗଚ (କଳ୍ପନା) । ∴ □ ଛଖଗଜ = □ ଙଖଗଚ (୧ ସ୍ବତଃ); କିନ୍ତୁ ଏହା ଅସାଧ୍ୟ (୯ ସ୍ବତଃ) । ∴ କଘ ଓ ଙଚ ଏକ ରେଖା; ଏବଂ କଖଗଘ ଓ ଙଖଗଚ କ୍ଷେତ୍ରଦ୍ୱୟ ଏକ ସମାନ୍ତରାଳ ମଧ୍ୟରେ ଅଛି ।

୬୪ ଉପପାଦ୍ୟ ।

କଖଗ ତ୍ରିଭୁଜର କଖ ଓ କଗ ବାହୁ ଉପରେ କଖଘଙ ଓ କଗଚଛ ସମାନ୍ତରିକଦ୍ୱୟ ଅଙ୍କିତ କର ଏବଂ ଘଙ ଓ ଚଛ ବର୍ଦ୍ଧିତ କରି ଜ ବିନ୍ଦୁରେ ମିଳିଅଛି ତାହାହେଲେ କଖ ଓ କଗ ର ଉପରି ଅଙ୍କିତ ସମାନ୍ତରିକଦ୍ୱୟର ସମଷ୍ଟି ଖଗ ଭୂମି ଓ କଜ ର ଅନ୍ତର୍ଗତ ସମାନ୍ତରିକର ସମାନ ହେବ ।



ଖ ଓ ଗ ବିନ୍ଦୁଠାରୁ କଜ ର ସମାନ୍ତରାଳ ଦୁଇଟି ରେଖା ଟାଣ ତାହା ଯେପରି ଘଙ ଓ ଚଛ କୁ କ୍ରମାନ୍ୱୟରେ ଟ ଓ ଠ ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରୁ । ଟ ଓ ଠ କୁ ସରଳରେଖାଦ୍ୱାରା ଯୋଗ କରି ଜକ କୁ ବର୍ଦ୍ଧିତ କର, ତାହା ଯେପରି ଟଠ ଓ ଖଗ କୁ ଡ ଓ ଥ ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରୁ । ଖଟ = କଜ = ଗଠ (୩୪ ଶ ପ୍ରଃ) ।

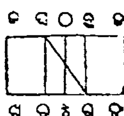
ଟଖଗଠ ଗୋଟିଏ ସମାନ୍ତରିକ (୩୩ ଶ ପ୍ରଃ); ଖଟ ଓ କଜ ସମାନ ଓ ସମାନ୍ତରାଳ ହେବାରୁ ଟଖଗଠ ସମାନ୍ତରିକକୁ ଖଗ ଓ କଜ ର ଅନ୍ତର୍ଗତ ସମାନ୍ତରିକ ବୋଲିଯାଇ ପାରେ ।

∴ କଖଘଙ କ୍ଷେତ୍ର = □ ଜଝଠଞ = □ ଝଠଟଥ (୩୫ ଶ ପ୍ର); ସେହିପରି □ ଜଗଟଣ = □ ଜଚଠଞ = □ ଚଠଟଥ (୩୫ ଶ ପ୍ର); ∴ □ ଜଝଘଡ + □ ଜଗଚଣ = □ ଝଠଟଥ + □ ଗଠଟଥ = □ ଝଚଠଝ । ଅତଏବ କଙଗ ତ୍ରିଭୁଜର ଇତ୍ୟାଦ ।

୩୭ ଶ ପ୍ରତିଜ୍ଞାର ଅନୁଶୀଳନୀ ।

୬୫ ଉପପାଦ୍ୟ ।

ଯେବେ କୌଣସି ସମାନ୍ତରାଳ କ୍ଷେତ୍ରର ଭୂମି, କୌଣସି ବିଷମ ଚତୁର୍ଭୁଜ କ୍ଷେତ୍ରର ଦୁଇ ସମାନ୍ତରାଳ ବାହୁର ସମଷ୍ଟିର ଅର୍ଦ୍ଧ ସହିତ ସମାନ ହୁଏ; ଏବଂ ଉଭୟ କ୍ଷେତ୍ର ଏକ ସମାନ୍ତରାଳ ମଧ୍ୟରେ ଥାଏ ତେବେ ସେମାନେ ପରସ୍ପର ସମାନ ହେବେ ।



କଖଗଘ ଏକ ବିଷମଚତୁର୍ଭୁଜର କଘ ଓ ଖଗ ବାହୁଦ୍ୱୟ ସମାନ୍ତର; ପ୍ରମାଣ କରିବାକୁ ହେବ ଯେ କଘ ଓ ଖଗ ର ସମଷ୍ଟିର ଅର୍ଦ୍ଧପରିମିତ ଭୂମି-ବିଶିଷ୍ଟ ଏକ ସମାନ୍ତରିକ କଘ ଓ ଖଗ ସମାନ୍ତର ରେଖାଦ୍ୱୟ ମଧ୍ୟରେ ସ୍ଥାପିତ ହେଲେ ତାହା ବିଷମଚତୁର୍ଭୁଜର ସମାନ ହେବ । ଖଗ କୁ ବର୍ଦ୍ଧିତ କରି ତହିଁରୁ କଘ ର ସମାନ ଗଡ ଅଂଶ ଛେଦ କର ଏବଂ ଘ ଗ ଓ ଡ ବିନ୍ଦୁରୁ ଯଥାକ୍ରମେ ଘଚ, ଗଛ ଓ ଡଜ ରେଖା କଖ ର ସମାନ୍ତରାଳ କରି ଟାଣ (୩୧ ଶ ପ୍ର); ଘଚ ରେଖା ଖଗ କୁ ଏବଂ ଗଛ ଓ ଡଜ ରେଖା ବର୍ଦ୍ଧିତ କଘ କୁ ଯଥାକ୍ରମେ ଚ, ଛ ଓ ଜ ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରୁ; ପରେ ଖଡ କୁ ଝ ବିନ୍ଦୁରେ ଦ୍ୱିଖଣ୍ଡ କର (୧୦ ମ ପ୍ର); ଆଉ ଝ ବିନ୍ଦୁରୁ କଖ ର ସମାନ୍ତରାଳ କରି ଝଠ ରେଖା ଟାଣ (୩୧ ଶ ପ୍ର) । ଗଡ = କଘ (କ୍ରିୟା) = ଖଚ (୩୪ ଶ ପ୍ର) ।

∴ □ ଛଝ = □ ଜଚ (୩୬ ଶ ପ୍ର); ଏବଂ △ ଛଘଗ = △ ଚଘଗ (୩୪ ଶ ପ୍ର); ∴ □ ଗଡଜଘ = □ କଖଗଘ (୨ ୟ ସ୍ୱତଃ);

ପୁନଶ୍ଚ □ କଚଠ = □ ଠଙ (୩୭ ଶ ପ୍ରଃ) । ∴ □ କଖଙଜ = □ ୨ କଖଗଘ = □ ୨ କଚଠ, ∴ □ କଖଗଘ = □ କଚଠ । ∴ କଘ ଓ ଖଗର ସମଷ୍ଟିର ଅର୍ଦ୍ଧ ଖଚ ର ଉପରେ ଅଙ୍କିତ କଚ ସମାନ୍ତରାଳ କ୍ଷେତ୍ରଟି କଖଗଘ ବିଷମ ଚତୁର୍ଭୁଜର ସହିତ ସମାନ ହୋଇ ସ୍ଥାପିତ ହେଲା ।

୩୭ ଶ ପ୍ରତିଜ୍ଞାର ଅନୁଶୀଳନୀ ।

୬୬ ସାଧ୍ୟ ।

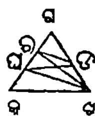
କୌଣସି ବିଷମଚତୁର୍ଭୁଜର ସମାନ ଏକ ତ୍ରିଭୁଜ ଅଙ୍କିତ କରିବାକୁ ହେବ । କଖଗଘ ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ବିଷମଚତୁର୍ଭୁଜର ଘ ବିନ୍ଦୁଠାରୁ କ ଗ କର୍ଣ୍ଣର ସମାନ୍ତର କରି ଏକ ରେଖା ଟାଣ ଯେ କଖ ବାହୁକୁ ବୃଦ୍ଧି କଲେ ଙ ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରିବ । ଙଗ ସଂଯୁକ୍ତ କର । ଙଖଗ ତ୍ରିଭୁଜଟି କଖଗଘ ବିଷମଚତୁର୍ଭୁଜର ସମାନ ହେବ । △ଙକଗ = △ଘକଗ (୩୭ ଶ ପ୍ରଃ) । ଉଭୟରେ △କଖଗ ଯୋଗ କଲେ କଖଗଘ କ୍ଷେତ୍ରଟି ଙଖଗ ତ୍ରିଭୁଜର ସମାନ ହେବ (୨ ୟ ସ୍ୱତଃ) ।

୩୮ ଶ ପ୍ରତିଜ୍ଞାର ଅନୁଶୀଳନୀ ।

୬୭ ସାଧ୍ୟ ।

କୌଣସି ତ୍ରିଭୁଜର ଏକ ବାହୁସ୍ଥିତ କୌଣସି ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ବିନ୍ଦୁରୁ ଏକ ସରଳରେଖା ଟାଣି ସେହି ତ୍ରିଭୁଜକୁ ଦ୍ୱିଖଣ୍ଡ କରିବାକୁ ହେବ ।

କଖଗ ଏକ ତ୍ରିଭୁଜ, ଏହାର କଗ ବାହୁସ୍ଥିତ ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ଘ ବିନ୍ଦୁଠାରୁ ଘଙ ରେଖା ଟାଣି ତ୍ରିଭୁଜକୁ ଦୁଇ ସମାନ ଅଂଶରେ ବିଭକ୍ତ କରିବାକୁ ହେବ ।

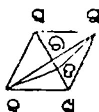


କଖଗ ତ୍ରିଭୁଜର କଗ ବାହୁକୁ ଚ ବିନ୍ଦୁରେ ଦ୍ୱିଖଣ୍ଡ କରି ଖଚ ଓ ଖଘ ସଂଯୁକ୍ତ କର ଏବଂ ଚ ବିନ୍ଦୁଠାରୁ ଖଘ ର ସମାନ୍ତର ଚଙ ରେଖା

ଟାଣ, ତାହା ଯେପରି ଖଗ କୁ ଙ ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରିବ । ଅତ ଘଙ ସଂଯୁକ୍ତ କଲେ ତଦ୍ଦ୍ୱାରା ତ୍ରିଭୁଜଟି ଦୁଇ ସମାନ ଅଂଶରେ ବିଭକ୍ତ ହେବ । △ଘଙଚ=△ଖଙଚ (୩୭ ଶ ପ୍ରଃ); ∴ ଉଭୟରେ △ଗଙଚ ଯୋଗ କଲେ △ଘଙଗ=△ଖଚଗ (୨ ସ୍ୱ ସ୍ୱତଃ) । କିନ୍ତୁ △ଖଚଗ=△କଖଗ ର ଅର୍ଦ୍ଧ (୩୮ ଶ ପ୍ରଃ) ; ∴ △ଘଙଗ =△କଖଗ ର ଅର୍ଦ୍ଧ । ∴ ଘଙ ରେଖା ଦ୍ୱାରା △କଖଗ ଦ୍ୱିଖଣ୍ଡ ହୋଇଅଛି ।

୬୮ ଉପପାଦ୍ୟ ।

କଖଗଘ ସମାନ୍ତରିକର କ ଓ ଗ କୌଣିକ ବିନ୍ଦୁଠାରୁ ଖଘ କର୍ଣ୍ଣସ୍ଥିତ କୌଣସି ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ଙ ବିନ୍ଦୁ ପର୍ଯ୍ୟନ୍ତ କଙ ଓ ଗଙ ଦୁଇ ସରଳରେଖା ଟାଣିଲେ କଘଙ ତ୍ରିଭୁଜ ଗଘଙ ତ୍ରିଭୁଜର ସମାନ ହେବ ।

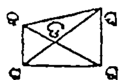


କଗ କର୍ଣ୍ଣ ଯୋଗ କର, ତାହା ଯେପରି ଖଘ କୁ ଚ ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରୁ । କଚ=ଚଗ (୫୮ ଉପ); ∴ △କଚଘ=△ଘଚଗ ଏବଂ △କଚଙ=△ଗଚଙ (୩୮ ଶ ପ୍ରଃ) । ତାହାହେଲେ △କଙଘ =△ଗଙଘ (୨ ସ୍ୱ ସ୍ୱତଃ) । ଅତଏବ କଖଗଘ ସମାନ୍ତରିକର ଇତ୍ୟାଦି ।

୩୯ ପ୍ରତିଜ୍ଞାର ଅନୁଶୀଳନୀ ।

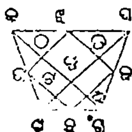
୬୯ ଉପପାଦ୍ୟ ।

କଖଗଘ ବିଷମ ଚତୁର୍ଭୁଜର କଗ ଓ ଖଘ କର୍ଣ୍ଣଦ୍ୱୟ ପରସ୍ପରକୁ ଙ ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କଲେ ଯେବେ କଙଘ ତ୍ରିଭୁଜ ଗଙଖ ତ୍ରିଭୁଜର ସମାନ ହୁଏ; ତେବେ କଖ ବାହୁ ଗଘ ବାହୁର ସମାନ୍ତର ହେବ । △କଙଘ=△ଗଙଖ (କଳ୍ପନା); ଉଭୟରେ △କଙଖ ଯୋଗ କଲେ △କଖଗ=△କଖଘ; ∴ କଖ ∥ ଗଘ (୩୯ ଶ ପ୍ରଃ) ।



୨୦ ଉପପାଦ୍ୟ ।

କୌଣସି ବିଷମ ଚତୁର୍ଭୁଜର ପ୍ରତ୍ୟେକ ବାହୁ ତ୍ରିଖଣ୍ଡ କରି ପରସ୍ପରର ନିକଟବର୍ତ୍ତୀ ଦୁଇ ଦୁଇଟି ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁ ସଂଯୁକ୍ତ କଲେ ତଦ୍ୱାରା ଯେ ଚତୁର୍ଭୁଜ ଉତ୍ପନ୍ନ ହେବ ତାହା ସମାନ୍ତରିକ, ଓ ବିଷମ ଚତୁର୍ଭୁଜର ଅର୍ଦ୍ଧେକ ହେବ ।



କଖଗଘ ଚତୁର୍ଭୁଜର କଖ, ଖଗ, ଗଘ ଓ ଘକ ଚାରିବାହୁ ପ୍ରତ୍ୟେକେ ଯଥାକ୍ରମେ ତ, ଛ, ଜ ଓ ଝ ବିନ୍ଦୁରେ ତ୍ରିଖଣ୍ଡ ହୋଇଅଛି; ପ୍ରମାଣ କରିବାକୁ ହେବ ଯେ ତଛଜଝ କ୍ଷେତ୍ରଟି ସମାନ୍ତରିକ ଓ ଓ ତାହା କଖଗଘ ଚତୁର୍ଭୁଜର ଅର୍ଦ୍ଧେକ ହେବ ;

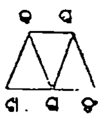
ଖଘ କର୍ଣ୍ଣ; କଗ କର୍ଣ୍ଣକୁ ଙ ବିନ୍ଦୁରେ, ତଛକୁ ଟ ବିନ୍ଦୁରେ ଓ ଜଝକୁ ଡ ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରୁ ଏବଂ କଗ କର୍ଣ୍ଣ, ତଝ ଓ ଛଜକୁ ଠ ଓ ଥ ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରୁ । ତଛ ॥ କଗ ॥ ଜଝ ଏବଂ ଛଜ ॥ ଖଘ ॥ ତଝ (୫୭ ଉପ) ; ∴ ତଛଜଝ କ୍ଷେତ୍ରଟି ସମାନ୍ତରିକ । ପୁନଶ୍ଚ △କଠତ = △ତଟଖ (୬୯, ୨୬ ଓ ୪ର୍ଥ ପ୍ରଃ) ; ଏବଂ କଠ = ତଟ = ଠଙ (୨୭ ଓ ୩୪ ପ୍ରଃ) ।

∴ □ତଙ = △କଠତ + △ତଟଖ । ଏହିପରି ପ୍ରମାଣ ହେବ ଯେ □ଛଙ + □ଜଙ + □ଝଙ = △ଟଖଛ + △ଗଥଛ + ଗଥଜ + △ଜଡଘ + △ଘଝ + △ଝଠକ । ∴ ତଛଜଝ ସମାନ୍ତରିକଟି କଖଗଘ ଚତୁର୍ଭୁଜର ଅର୍ଦ୍ଧ । ∴ କୌଣସି ଚତୁର୍ଭୁଜ ଇତ୍ୟାଦି ।

୪୦ ଶ ପ୍ରତିଜ୍ଞାର ଅନୁଶୀଳନୀ ।

୨୧ ଉପପାଦ୍ୟ ।

ସମାନ ୨ ତ୍ରିଭୁଜ ଏକ ସମାନ୍ତରାଳ ରେଖାଦ୍ୱୟ ମଧ୍ୟରେ ଥିଲେ ସମାନ ୨ ଭୂମି ଉପରେ ଅବସ୍ଥିତ ହେବେ ।



କଖଗ ଓ ଘଗଙ ଦୁଇ ସମାନ ତ୍ରିଭୁଜ ଖଙ ଓ କଘ ଦୁଇ ସମାନ୍ତରାଳ ମଧ୍ୟରେ ଅନ୍ତର୍ଗତ ତାହାହେଲେ ଏ ଦୁଇ ତ୍ରିଭୁଜ ସମାନ ଭୂମି ଉପରେ ରହିବେ ।

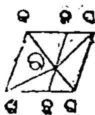
△କଖଗ = △କଗଘ = △ଗଘଙ (୨୭ ଓ ୨୪ ପ୍ରଃ);

ତାହାହେଲେ ଖଗ = କଘ = ଗଙ । ଅତଏବ କଖଗ ଓ ଘଗଙ ଦୁଇ ତ୍ରିଭୁଜ ଖଗ ଓ ଗଙ ସମାନ ସମାନ ଭୂମି ଉପରେ ଅବସ୍ଥିତ ହେଲେ ।

୪୧ ଶ ପ୍ରତିଜ୍ଞାର ଅନୁଶୀଳନୀ ।

୭୨ ଉପପାଦ୍ୟ ।

କୌଣସି ସମାନ୍ତରାଳ କ୍ଷେତ୍ରର ଅଭ୍ୟନ୍ତରସ୍ଥ କୌଣସି ବିନ୍ଦୁରୁ ଯେବେ ଚତୁଃକୋଣ ପର୍ଯ୍ୟନ୍ତ ସରଳ ରେଖା ଟଣାଯାଏ, ତେବେ ସମ୍ମୁଖୀନ କୌଣସି ଦୁଇବାହୁ ଉପରେ ଯେଉଁ ତ୍ରିଭୁଜ ଅଙ୍କିତ ତାହା ଏକତ୍ରେ ସେହି ସମାନ୍ତରାଳର ଅର୍ଦ୍ଧ ହେବ ;



କଖଗଘ ସମାନ୍ତରାଳର ମଧ୍ୟରେ କୌଣସି ସ୍ଥାନରେ ଠ ନାମକ ଏକ ବିନ୍ଦୁ ନେଇ ତାହାଠାରୁ ଚାରି କୌଣିକ-ବିନ୍ଦୁ ପର୍ଯ୍ୟନ୍ତ ରେଖା ଟାଣିଲେ କଖଠ ଓ ଗଘଠ ଦୁଇ ତ୍ରିଭୁଜ ଏକତ୍ରେ କଖଗଘ କ୍ଷେତ୍ରର ଅର୍ଦ୍ଧ ହେବ ।

ଠ ବିନ୍ଦୁଦେଇ କଖ ବା ଗଘର ସମାନ୍ତରାଳ ଚଛ ଏକ ରେଖା ଟାଣ ତାହା ଯେପରି ଖଗ ଓ କଘ ବାହୁକୁ ଛ ଓ ଚ ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରେ ।

△ କଖଠ = $\frac{1}{2}$ □ ଖଚ ଏବଂ △ଗଘଠ = $\frac{1}{2}$ □ ଗଚ

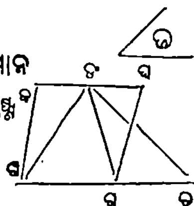
(୪୧ ଶ ପ୍ରଃ); ∴ △କଖଠ + △ଗଘଠ = $\frac{1}{2}$ □ କଖଗଘ ।

∴ କୌଣସି ସମାନ୍ତରାଳ କ୍ଷେତ୍ରର ଇତ୍ୟାଦି ।

୪୨ ଶ ପ୍ରତିଜ୍ଞାର ଅନୁଶୀଳନୀ ।

୭୩ ସମ୍ପାଦ୍ୟ ।

ଏକ ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ସମାନ୍ତରିକର ସମାନ ଓ କୌଣସି ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ସରଳରୈଖିକ କୋଣର ସମାନ ଏକକୋଣବିଶିଷ୍ଟ ଏକ ତ୍ରିଭୁଜ ଅଙ୍କିତ କରିବାକୁ ହେବ ।



କଖଗଘ କୌଣସି ସମାନ୍ତରାଳ କ୍ଷେତ୍ରର ସମାନ ଏବଂ ଜ ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ କୋଣର ସମାନକୋଣବିଶିଷ୍ଟ ଏକ ତ୍ରିଭୁଜ ଅଙ୍କିତ କରିବାକୁ ହେବ ।

କଖଗଘ ସମାନ୍ତରାଳ କ୍ଷେତ୍ରର ଖଗ ଭୂମିକୁ ଚ ପର୍ଯ୍ୟନ୍ତ ବୃଦ୍ଧି କରି ଗଚ କୁ ଖଗର ସମାନ କର ଏବଂ ଖଚ ରେଖାର ଖ ବିନ୍ଦୁରେ ଜ କୋଣର ସମାନ ଚଖଙ କୋଣ ଅଙ୍କିତ କର (୨୩ ଶ ପ୍ରଃ) । ଖଙ ଯେପରି କଘ ବା ବର୍ଦ୍ଧିତ କଘ କୁ ଙ ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରୁ ଙଗ ଓ ଙଚ ଯୋଗ କର । ତେବେ ଖଙଚ ସମ୍ପାଦ୍ୟ ତ୍ରିଭୁଜ ହେବ ।

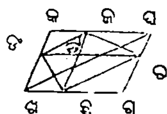
∵ □କଖଗଘ = △ ୨ ଙଖଗ (୪୧ ଶ ପ୍ରଃ); କିନ୍ତୁ △ଙଖଗ = △ଙଗଚ (୩୮ ଶ ପ୍ରଃ); ∴ △ଙଖଗ + △ଙଗଚ = □କଖଗଘ = △ଙଖଚ । ∴ କୌଣସି ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ସମାନ୍ତରାଳ କ୍ଷେତ୍ରର ସମାନ ଇତ୍ୟାଦି ।

୪୩ ଶ ପ୍ରତିଜ୍ଞାର ଅନୁଶୀଳନୀ ।

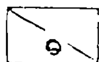
୭୪ ଉପପାଦ୍ୟ ।

୪୩ ଶ ପ୍ରତିଜ୍ଞା ଚିତ୍ରରେ ଙଜ, ଖଘ ଓ ଛଚ ସରଳରେଖା ଦ୍ୱାରା ସଂଯୁକ୍ତ କରି ପ୍ରମାଣ କର, ଏହି କର୍ଣ୍ଣରେଖାତ୍ରୟ ପରସ୍ପର ସମାନ୍ତରାଳ ହେବ । ଙଛ ଓ ଚଜ ଯୋଗ କର ।

□ଝଠ = □ଘଠ (୪୩ ଶ ପ୍ରଃ); ∴ △ଡଝଠ = △ଜଚଠ (୩୪ ଶ ପ୍ରଃ ଓ ୭ ମ ସ୍ୱଃ); ଉଭୟ ତ୍ରିଭୁ-



ଜରେ △ଡଠଜ ଯୋଗ କଲେ △ଡଝଜ = △ଜଚଡ; ∴ ଡଜ ∥ ଚଝ (୩୯ ଶ ପ୍ର) ପୁନଶ୍ଚ ଖଜ ଓ ଡଘ ଯୋଗ କର □ଠଖ = □ଠଘ (୪୩ ଶ ପ୍ରଃ) ଉଭୟରେ କଡଠଜ ସମାନ୍ତରାଲ କ୍ଷେତ୍ର ଯୋଗ କଲେ □ କଝ = □ଡଘ; ∴ △କଖଜ = △ଡଘକ (୩୪ ଶ ପ୍ରଃ ଓ ୭ମ ସ୍ୱତଃ); ଉଭୟରୁ △ କଡଜ ଅନ୍ତର କଲେ △ ଡଖଜ = △ ଡଘଜ; ∴ ଡଜ ∥ ଝଘ (୩୯ ଶ ପ୍ରଃ); କିନ୍ତୁ ଡଜ ∥ ଚଝ; ∴ ଚଝ ∥ ଡଜ ∥ ଖଘ ।

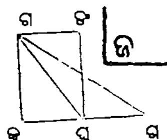


୪୪ ଶ ପ୍ରତିଜ୍ଞାର ଅନୁଶୀଳନୀ ।

୭୬ ସାଧ୍ୟ ।

ଏକ ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ସମାନ୍ତରିକର ସମାନ ଓ ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ସରଳରୈଖିକ କୋଣର ସମାନ ଏକ କୋଣବିଶିଷ୍ଟ ତ୍ରିଭୁଜ କୌଣସି ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ସରଳ ରେଖା ଉପରେ ସ୍ଥାପନ କରିବାକୁ ହେବ ।

କଖ ଏକ ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ସରଳରେଖା; ଚ ଏକ ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ସମାନ୍ତରିକ ଏବଂ ଜ ଏକ ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ସରଳରୈଖିକ କୋଣ; ଚ ସମାନ୍ତରିକର ସମାନ ଓ ଜ କୋଣର ସମାନ କୋଣବିଶିଷ୍ଟ ଏକ ତ୍ରିଭୁଜ କଖ ରେଖା ଉପରେ ସ୍ଥାପିତ କରିବାକୁ ହେବ ।



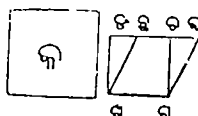
ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ କଖ ରେଖାକୁ ଘ ବିନ୍ଦୁରେ ଦ୍ୱିଖଣ୍ଡ କରି କଘ ରେଖା ଉପରେ କଘଡଗ ଗୋଟିଏ ସମାନ୍ତରାଲ କ୍ଷେତ୍ର ଏରୂପେ ଅଙ୍କିତ କର ଯେ କି ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ଚ ସମାନ୍ତରିକର ସମାନ ଏବଂ ତାହାର ଗକଘ କୋଣ; ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ଜ କୋଣର ସମାନ ହେବ । (ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ଚ ସମାନ୍ତରିକକୁ ଦୁଇଟି ତ୍ରିଭୁଜରେ ବିଭକ୍ତ କରି ପୂର୍ବୋକ୍ତ (୪୪ ଶ ପ୍ରଃ ସାହାଯ୍ୟରେ

ଅଙ୍କିତ କର) । ପରେ ଗଘ ଓ ଗଖ ସଂଯୁକ୍ତ କଲେ (କଖଗ ସମ୍ପାଦ୍ୟ ତ୍ରିଭୁଜ ହେବ । କାରଣ କଚଙ ସମାନ୍ତରାଳ କ୍ଷେତ୍ର ଓ କଖଗ ତ୍ରିଭୁଜ ଉଭୟ କଘଗ ତ୍ରିଭୁଜର ଦ୍ୱିଗୁଣ ହେବାରୁ (୩୪ ଓ ୪୮ ପ୍ରଃ) ; △କଖଗ = □ କଚଙ = □ ଚ ; ଅଉ ତାହାର ∠ଗକଖ = ∠ଚ ॥ ∴ କୌଣସି ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ସମାନ୍ତରଜରର ଇତ୍ୟାଦ ।

୪୫ ଶ ପ୍ରତିଜ୍ଞାର ଅନୁଶୀଳନୀ ।

୭୭ ସମ୍ପାଦ୍ୟ ।

କୌଣସି ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ଚତୁର୍ଭୁଜର ସମାନ ଗୋଟିଏ ରମ୍ବସ ଅଙ୍କିତ କରିବାକୁ ହେବ ।



କ ଏକ ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ଚତୁର୍ଭୁଜର ସମାନ ଏକ ରମ୍ବସ ଅଙ୍କିତ କରିବାକୁ ହେବ ।

କ ଚତୁର୍ଭୁଜର ସମାନ ଏବଂ ସମକୋଣବିଶିଷ୍ଟ ଏକ ଖଗଚଙ ସମାନ୍ତରଜ ଅଙ୍କିତ କର (୪୫ ଶ ପ୍ରଃ) (କିନ୍ତୁ ତାହାର ଖଙ ବାହୁ ଯେପରି ଖଗ ବାହୁଠାରୁ କ୍ଷୁଦ୍ର ହୁଏ) ଏବଂ ଖ ବିନ୍ଦୁରୁ ଖଗର ସମାନ ଏକ ରେଖା ଟାଣି ଙଚର ସହିତ ଛ ବିନ୍ଦୁରେ ମିଳାଅ । ପରେ ଗ ବିନ୍ଦୁରୁ ଛଖର ସମାନ୍ତର କରି ଏକ ରେଖା ଟାଣି ବର୍ଦ୍ଧିତ ଙଚର ସହିତ ଘ ବିନ୍ଦୁରେ ମିଳାଅ । ତହିଁରେ ଛଖଗଘ ସମ୍ପାଦ୍ୟ ରମ୍ବସ କ୍ଷେତ୍ର ହେବ । ∴ ରମ୍ବସର ଚାରିଟି ବାହୁ ପରସ୍ପର ସମାନ ହୋଇଅଛି (୩୪ ଶ ପ୍ରଃ ୧ମ ସିଦ୍ଧାଃ); କିନ୍ତୁ ଏକକୋଣ ସୁଦ୍ଧା ସମକୋଣ ନୁହେ ଅଉ ଏହା ମଧ୍ୟ ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ଚତୁର୍ଭୁଜ କ୍ଷେତ୍ରର ସମାନ ହୋଇଅଛି (୩୫ ଶ ପ୍ରଃ ଓ ୧ମ ସିଦ୍ଧାଃ) । ଅତଏବ କୌଣସି ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ଚତୁର୍ଭୁଜର ସମାନ ଇତ୍ୟାଦ ।

୪୬ ଶ ପ୍ରତିଜ୍ଞାର ଅନୁଶୀଳନୀ ।

୭୭ ସମ୍ପାଦ୍ୟ ।

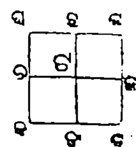
କୌଣସି ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ସମଚତୁର୍ଭୁଜର ଚତୁର୍ଗୁଣ ଅଉ ଏକ ସମଚତୁର୍ଭୁଜ ଅଙ୍କିତ କରିବାକୁ ହେବ ।

କଖଗଘ ଏକ ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ସମଚତୁର୍ଭୁଜ ଏହାର ଚତୁର୍ଗୁଣ କର ଗୋଟିଏ ସମଚତୁର୍ଭୁଜ ଅଙ୍କିତ କରିବାକୁ ହେବ । କଖ ବାହୁକୁ ଙ ବିନ୍ଦୁ ପର୍ଯ୍ୟନ୍ତ ଓ କଘ ବାହୁକୁ ଚ ବିନ୍ଦୁ ପର୍ଯ୍ୟନ୍ତ ବୃଦ୍ଧି କରି କଖ=ଖଙ; ଓ କଘ=ଘଚ, କର । ପରେ ଚ ବିନ୍ଦୁଠାରୁ ଖଙର ଓ ଙ ବିନ୍ଦୁଠାରୁ କଚର ସମାନ୍ତରାଳ କରି ଦୁଇଟି ରେଖା ଟାଣି ଦ୍ୱୟଙ୍କୁ ଛ ବିନ୍ଦୁରେ ମିଳାଅ । କଙଛଚ ସମଚତୁର୍ଭୁଜ, ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ କଖଗଘ ସମଚତୁର୍ଭୁଜର ଚତୁର୍ଗୁଣ ହେବ ।

ଖଗକୁ ବୃଦ୍ଧି କରି ଚଛ ବାହୁର ସହିତ ଜ ବିନ୍ଦୁରେ ଓ ଘଗକୁ ବୃଦ୍ଧି କରି ଙଛର ସହିତ ଝ ବିନ୍ଦୁରେ ମିଳାଅ । ଗଘ=କଖ=ଖଙ (କ୍ରିୟା)=ଗଝ (୩୪ଶ ପ୍ରଃ) ଏବଂ କଘ=ଖଗ=ଙଝ (୩୪ ଶ ପ୍ରଃ); ଅତ୍ୟ ∠କ=∠ଗଖଙ (୨୯ ଶ ପ୍ରଃ); ∠କଖଗ =∠ଖଙଝ (୨୯ ଶ ପ୍ରଃ); ∴ ଖଙଝଗ କ୍ଷେତ୍ର ସମଚତୁର୍ଭୁଜ (୩୦ ସଃ); ଏବଂ କଖଗଘ ସମଚତୁର୍ଭୁଜର ସହିତ ସର୍ବତୋଭାବେ ସମାନ (୭ଷ୍ଠ ଉପଃ); ସେହିପରି ଘଜ ଓ ଜଝ ସମାନ୍ତରିକ ଦୁଇଟି ମଧ୍ୟ ସମଚତୁର୍ଭୁଜ ଓ ପ୍ରତ୍ୟେକେ କଖଗଘ ସମଚତୁର୍ଭୁଜର ସମାନ । ∴ ସମସ୍ତ କଙଛଚ ସମଚତୁର୍ଭୁଜଟି କଖଗଘ ସମଚତୁର୍ଭୁଜର ଚତୁର୍ଗୁଣ । ∴ କୌଣସି ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ସମଚତୁର୍ଭୁଜର ଚତୁର୍ଗୁଣ ଇତ୍ୟାଦି ।

୨୮ ଉପପାଦ୍ୟ ।

କୌଣସି ରେଖାର ଉପର ଅଙ୍କିତ ସମଚତୁର୍ଭୁଜ ସେହି ରେଖାର ଅର୍ଦ୍ଧକର ଉପର ଅଙ୍କିତ ସମଚତୁର୍ଭୁଜର ଚତୁର୍ଗୁଣ ।



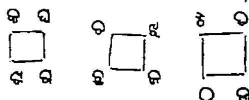
କଖ କୌଣସି ସରଳରେଖା ଉପରେ କଖଗଘ ସମଚତୁର୍ଭୁଜ (୪୬ ଶ ପ୍ରଃ) ଅଙ୍କିତ କର କଖ ଓ କଘ ବାହୁଦ୍ୱୟକୁ ଯଥାକ୍ରମେ ଙ ଓ ଚ ବିନ୍ଦୁରେ ଦ୍ୱିଖଣ୍ଡ କର; ଙ ବିନ୍ଦୁରୁ କଘ କିମ୍ବା ଖଗର ସମା-

ନ୍ତର କର ଏକ ରେଖା ଟାଣି ଗଘ ବାହୁରୁ ଛ ବିନ୍ଦୁରେ ମିଳାଅ, ଆଉ ଚ ବିନ୍ଦୁରୁ କଖ କିମ୍ବା ଗଘର ସମାନ୍ତର କରି ଆଉ ଏକ ରେଖା ଟାଣି ଙଛକୁ ଠ ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରି ଖଗର ସହିତ ଜ ବିନ୍ଦୁରେ ମିଳାଅ । କଖ = କଘ ∴ କଙ = ଙଚ (୭ମ ସ୍ୱତଃ), ଆଉ ∠କ = ∠ସମ; ଅତଏବ □ କଠ = ସମଚତୁର୍ଭୁଜ (୬୨ ଉପଃ); ସେହିପରି □ ଖଠ, □ ଗଠ ଓ ଘଠ ସେସବୁ ପ୍ରତ୍ୟେକେ ସମଚତୁର୍ଭୁଜ ଏବଂ ଏମାନେ ପ୍ରତ୍ୟେକେ କଖ ରେଖାର ଅର୍ଦ୍ଧର ଉପର ଅଙ୍କିତ ସମଚତୁର୍ଭୁଜର ସମାନ । ଅତଏବ କଖ^2 = ୪ କଙ^2 (୮ମ ସ୍ୱତଃ) ।

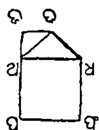
୪୭ ପ୍ରତିଜ୍ଞାର ଅନୁଶୀଳନୀ ।

୭୯ ସମ୍ପାଦ୍ୟ ।

କେତେଗୁଡିଏ ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ସମଚତୁର୍ଭୁଜର ସମାନ ଏକ ସମଚତୁର୍ଭୁଜ ଅଙ୍କିତ କରିବାକୁ ହେବ । ମନେ କର କଖଗଘ; ଚଛଜଝ ଓ ଟଠଡଢ ଏହି ତିନି ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ସମଚତୁର୍ଭୁଜର ସମଷ୍ଟିର ସମାନ ଏକ ସମଚତୁର୍ଭୁଜ ଅଙ୍କିତ କରିବାକୁ ହେବ ।



ତଥ କୌଣସି ରେଖାକୁ କଖ ବାହୁର ସମାନ ନେଇ ତ ବିନ୍ଦୁଠାରୁ ତଥର ସହିତ ସମକୋଣ



କରି ତଦ ରେଖା ଟାଣ ଓ ତାହାକୁ ଚଛ ବାହୁର ସମାନ କରି ଥଦ ଯୋଗ କର । ପରେ ଥଦ ରେଖାର ସହିତ ସମକୋଣ କରି ଦ ବିନ୍ଦୁଠାରୁ ଦଧ ରେଖା ଟାଣ (୧୧ ଶ ପ୍ରଃ) ଏବଂ ଦଧକୁ ଟଠ ବାହୁର ସମାନ କରି ଥଧ ସଂଯୁକ୍ତ କର । ଥଧ ରେଖା ଉପରେ ଗୋଟିଏ ସମଚତୁର୍ଭୁଜ ଅଙ୍କିତ କଲେ (୪୬ଶ ପ୍ରଃ); ତାହା ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ

ତନ ସମଚତୁର୍ଭୁଜର ସମଷ୍ଟିର ସହିତ ସମାନ ହେବ । କାରଣ

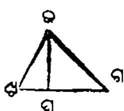
ଥଧ^{2} = ଦଥ^{2} + ଥଦ^{2} (୪୭ ଶ ପ୍ରଃ);

= ଦଥ^{2} + ତଦ^{2} + ତଥ^{2} (୪୭ ଶ ପ୍ରଃ);

= ଝଠ^{2} + ଚଛ^{2} + କଙ^{2} ।

୮୦ ଉପପାଦ୍ୟ ।

କୌଣସି ତ୍ରିଭୁଜର ଶୃଙ୍ଗଠାରୁ ଭୂମି ଉପରେ ଲମ୍ବପାତ କଲେ, ଭୂମିର ଦୁଇଖଣ୍ଡର ଉପର ଅଙ୍କିତ ସମଚତୁର୍ଭୁଜଦ୍ୱୟର ଅନ୍ତର ; ଅନ୍ୟ ଦୁଇବାହୁର ଉପର ଅଙ୍କିତ ସମଚତୁର୍ଭୁଜଦ୍ୱୟର ଅନ୍ତରର ସମାନ ।



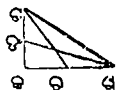
କଖଗ କୌଣସି ତ୍ରିଭୁଜର କ ଶୃଙ୍ଗଠାରୁ ଖଗ ଭୂମି ଉପରେ କଘ ଲମ୍ବ ଟଣା ହୋଇଅଛି । ପ୍ରମାଣ କର ଯେ ଖଘ ଓ ଗଘ ଦୁଇଖଣ୍ଡର ଉପର ଅଙ୍କିତ ସମଚତୁର୍ଭୁଜଦ୍ୱୟର ଅନ୍ତର, କଖ ଓ କଗ ବାହୁଦ୍ୱୟର ଉପର ଅଙ୍କିତ ସମଚତୁର୍ଭୁଜଦ୍ୱୟର ଅନ୍ତରର ସହିତ ସମାନ ହେବ । କାରଣ

କଖ^{2} = ଖଘ^{2} + କଘ^{2} ଏବଂ କଗ^{2} = ଗଘ^{2} + କଘ^{2} (୪୭ ଶ ପ୍ରଃ)

∴ କଖ^{2} − କଗ^{2} = ଖଘ^{2} − ଗଘ^{2} (୩ ସ୍ୱ ସ୍ୱତଃ) ∴ କୌଣସି ତ୍ରିଭୁଜର ଇତ୍ୟାଦି ।

୮୧ ଉପପାଦ୍ୟ ।

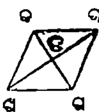
କଖଗ ସମକୋଣୀ ତ୍ରିଭୁଜର ଯେବେ କ କୋଣ ସମକୋଣ ହୁଏ, ଏବଂ ଖ ଓ ଗ ବିନ୍ଦୁଠାରୁ ଖଡ ଓ ଗଚ ଦୁଇ ସରଳରେଖା ସମ୍ମୁଖୀନ ବାହୁଦ୍ୱୟର ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁ ପର୍ଯ୍ୟନ୍ତ ଟଣାଯାଏ ତେବେ ୪ (ଖଡ^{2} + ଗଚ^{2})



=୨ଗଖ^2 । ∴ ୪ଗଚ^2+୪ଖଛ^2=୪କଗ^2+୪କଚ^2+୪କଙ^2+୪ଙଛ^2; କିନ୍ତୁ ୪ କଚ^2=କଖ^2 (୭୮ ଉପଃ) ଏବଂ ୪କଛ^2=କଗ^2 (୭୮ ଉପ) । ∴ ୪ ଗଚ^2 +୪ ଖଛ^2=୫ କଖ^2+୫ କଗ^2=୫ ଖଗ^2 (୪୭ ଶ ପ୍ରଃ) ।

୮୨ ଉପପାଦ୍ୟ ।

ରମ୍ବସର ଚାରିବାହୁର ଉପର ଅଙ୍କିତ ସମଚତୁର୍ଭୁଜର ସମଷ୍ଟି ତାହାର କର୍ଣ୍ଣଦ୍ୱୟର ଉପର ଅଙ୍କିତ ଦୁଇ ସମଚତୁର୍ଭୁଜର ସମାନ ।



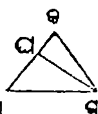
କଖଗଘ ଗୋଟିଏ ରମ୍ବସ, ତାହାର କଗ ଓ ଖଘ କର୍ଣ୍ଣଦ୍ୱୟ ପରସ୍ପରକୁ ଙ ବିନ୍ଦୁରେ ଦ୍ୱିଖଣ୍ଡ କରୁଅଛି (୪୨ ଶ ଉପଃ) ।

∴ କଖ^2=କଙ^2+ଖଙ^2 (୪୭ ଶ ପ୍ରଃ) । ∴ ୪ କଖ^2=୪ କଙ^2 +୪ ଖଙ^2=କଗ^2+ଖଘ^2 (୭୮ ଉପଃ) । ∴ କଖ^2+ଖଗ^2+ ଗଘ^2+କଘ^2=କଗ^2+ଖଘ^2 ।

୮୩ ଉପପାଦ୍ୟ ।

କୌଣସି ସୂକ୍ଷ୍ମକୋଣୀ ତ୍ରିଭୁଜର ସୂକ୍ଷ୍ମକୋଣର ସମ୍ମୁଖୀନ ବାହୁ ଉପର ଅଙ୍କିତ ସମଚତୁର୍ଭୁଜ, ସୂକ୍ଷ୍ମକୋଣର ପାର୍ଶ୍ୱସ୍ଥ ଦୁଇ ବାହୁର ଉପର ଅଙ୍କିତ ସମଚତୁର୍ଭୁଜ ଅପେକ୍ଷା କ୍ଷୁଦ୍ର ହେବ ।

କଖଗ ଏକ ସୂକ୍ଷ୍ମକୋଣୀ ତ୍ରିଭୁଜ, ଏହାର ଖଗ ବାହୁର ଉପର ଅଙ୍କିତ ସମଚତୁର୍ଭୁଜ, କଖ ଓ କଗ ଦୁଇ ବାହୁର ଉପର ଅଙ୍କିତ ସମଚତୁର୍ଭୁଜର ଯୋଗଠାରୁ ସାନ ହେବ ।



ଗ ବିନ୍ଦୁଠାରୁ କଖ ରେଖା ଉପରେ ଏକ ଲମ୍ବ ଟାଣ (ଲମ୍ବଟି ତ୍ରିଭୁଜର ଅନ୍ତରସ୍ଥ ହେବ (୧୭ ପୃଃ) ଯେହେତୁ କ ଓ ଖ କୋଣ ଦୁଇଟି ସୂକ୍ଷ୍ମକୋଣ) ।

∵ କଗ′ 7 ଗଘ′ (୪୭ ଶ ପୃଃ) ∴ ଉଭୟେ ଖଘ′ ଯୋଗ କଲେ କଗ′ + ଖଘ′ 7 ଗଘ′ + ଖଘ′ (୪ ପୃଃ); କିନ୍ତୁ ଗଘ′ + ଖଘ′ = ଖଗ′ (୪୭ଶ ପୃଃ) ∴ କଗ′ + ଖଘ′ 7 ଖଗ′; ∴ କଗ′ + କଖ′ 7 ଖଗ′ ।

∴ କୌଣସି ସୂକ୍ଷ୍ମକୋଣୀ ତ୍ରିଭୁଜର ଇତ୍ୟାଦି ।

୮୪ ଉପପାଦ୍ୟ ।

କୌଣସି ସ୍ଥୂଳକୋଣୀ ତ୍ରିଭୁଜର ସ୍ଥୂଳ କୋଣର ସମ୍ମୁଖସ୍ଥ ବାହୁର ଉପର ଅଙ୍କିତ ସମଚତୁର୍ଭୁଜ ସ୍ଥୂଳକୋଣର ପାର୍ଶ୍ୱସ୍ଥ ଦୁଇ ବାହୁର ଉପର ଅଙ୍କିତ ସମଚତୁର୍ଭୁଜ ଅପେକ୍ଷା ବୃହତ୍ତର ହେବ ।

କଖଗ କୌଣସି ତ୍ରିଭୁଜର ଖକଗ କୋଣ ସ୍ଥୂଳକୋଣ, ଅତଏବ ଖଗ ବାହୁର ଉପର ଅଙ୍କିତ ସମଚତୁର୍ଭୁଜ, କଖ ଓ କଗ ଦୁଇ ବାହୁର ଉପର ଅଙ୍କିତ ସମଚତୁର୍ଭୁଜ ଦୁଇଟିର ସମଷ୍ଟିଠାରୁ ବୃହତ୍ତର ହେବ । ଗ ବିନ୍ଦୁଠାରୁ ବର୍ଦ୍ଧିତ ଖକ ବାହୁ ଉପରେ ଗଘ ଲମ୍ବ ଟାଣ । ∵ କୌଣସି ରେଖା ଯେଉଁଠାରୁ ଇଚ୍ଛା ସେଠାରୁ ଦୁଇ ଅଂଶରେ ବିଭକ୍ତ ହେଉ, ସେହି ରେଖାର ଉପର ଅଙ୍କିତ ସମଚତୁର୍ଭୁଜଟି ତାହାର ଖଣ୍ଡଦ୍ୱୟର ଉପର ଅଙ୍କିତ ସମଚତୁର୍ଭୁଜଦ୍ୱୟର ସମଷ୍ଟିଠାରୁ ବୃହତ୍ତର ହେବ; ଏହା



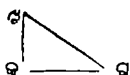
ତଏ ଅଙ୍କିତ କଲମାଏ ସ୍ପଷ୍ଟରୂପେ ଜଣାଯିବ (୪୬ ପ୍ର ୧ମ ସ୍ୱତଃ);
∴ ଖ'ଘ > କ'ଖ + କ'ଘ, ∴ ଉଭୟରେ ଗ'ଘ ଯୋଗ କଲେ ଖ'ଘ +
ଗ'ଘ > କ'ଖ + କ'ଘ + ଗ'ଘ (୮ ସ୍ୱତ) କିନ୍ତୁ ଖ'ଘ + ଗ'ଘ = ଖ'ଗ
ଏବଂ କ'ଘ + ଗ'ଘ = କ'ଗ (୪୬ ପ୍ରଃ), ∴ ଖ'ଗ > କ'ଖ + କ'ଗ ।

୪୮ଶ ପ୍ରତିଜ୍ଞାର ଅନୁଶୀଳନୀ ।

୮୫ ଉପପାଦ୍ୟ ।

ଯଦି କଖଗ ତ୍ରିଭୁଜର ଖଗ ବାହୁ କଖର ଦ୍ୱିଗୁଣ ହୁଏ, ଓ କଗର ଉପର ଅଙ୍କିତ ସମଚତୁର୍ଭୁଜ କଖର ଉପର ଅଙ୍କିତ ସମଚତୁର୍ଭୁଜର ତିନିଗୁଣ ହୁଏ; ତେବେ ଖକଗ କୋଣଟି ସମକୋଣ ହେବ ।

∴ ଖଗ = ୨ କଖ ∴ ଖଗ' = ୪ କଖ' (୭୮ ଉପ); ପୁନରପି କଗ' = ୩ କଖ' (କଳ୍ପନା); ∴ ଉଭୟରେ କଖ' ଯୋଗ କଲେ କଖ' + କଗ' = ୪ କଖ' (୨ୟ ସ୍ୱତ)



∴ କଖ' + କଗ' = ଖଗ' (୧ମ ସ୍ୱତଃ); ∴ ∠କ = ∠ସମ (୪୮ଶ ପ୍ରଃ) ∴ ଯଦି କଖଗ ତ୍ରିଭୁଜର ଇତ୍ୟାଦି ।

